Annihilation à Paris 1 : notes corrigées

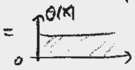
Introduction :

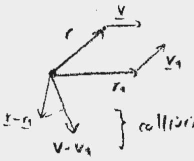
$$(\partial_t + v\nabla) f(r,v,t) = J[f,f] = \sigma^2 \int dv_1 \int d\hat\sigma\, \theta(g\hat\sigma)\, g\hat\sigma \left(\frac{1}{\alpha^2} b^{-1} - 1\right) f(r,v,t) f(r,v_1,t)$$; α : coeff. restitution

Hypothèse dans cette dernière équation : collision si les 2 particules ont les mêmes positions. Avec :

$$\int dv_1 \int dv_2 \int d\hat\sigma\, \theta(\hat\sigma \cdot g)\, \hat\sigma g\, f(r_1,v_1,t) f(r_2,v_2,t) = \text{taux de collision}$$

$g = v - v_1$; $\hat\sigma = \frac{r - r_1}{|r - r_1|}$

$\Theta(g\hat\sigma) =$  $= \begin{cases} 1 & g\hat\sigma > 0 \\ 0 & g\hat\sigma < 0 \end{cases}$



} collision possible $\Rightarrow \theta = 1$.

Interprétation des termes : $\frac{1}{\alpha^2} b^{-1}$: terme de gain qui "augmente" $f(r,v,t)$, i.e. toutes les collisions qui ont eu lieu et qui sont t.q. la vitesse finale est v.

-1 : terme de perte : si l'équation n'admet que ce terme, alors : $D_t f = -\int dv_1 \ldots f(r,v,t) f(r,v_1,t)$: toutes les collisions t.q. 2 particules entrent en collision avec l'une qui a v et l'autre v_1 → engendre l'annihilation pure.

$b^{-1} g = g - \frac{1+\alpha}{\alpha}(g\hat\sigma)\hat\sigma$: opérateur inverse ⚠ $b^{-1} v_{\frac{1}{2}} = v_{\frac{1}{2}} \mp \frac{1+\alpha}{2\alpha}(v_{\frac{1}{2}}\hat\sigma)\hat\sigma$, $b v_{\frac{1}{2}} = v_{\frac{1}{2}} \mp \frac{1+\alpha}{2}(v_{\frac{1}{2}}\hat\sigma)\hat\sigma$; passe de $b \leftrightarrow b^{-1}$ par $\alpha \leftrightarrow \alpha^{-1}$.

$b g = g - (1+\alpha)(g\hat\sigma)\hat\sigma$: opérateur collisionnel : $bg = g'$: b : avant → après ; b^{-1} : après → avant : reconstruction de la collision.
Pour l'annihilation, l'opérateur b n'intervient pas car il n'y a pas de vitesses finales et b^{-1} n'a pas de sens.

Annihilation pure : interprétation de l'opérateur de collision :

$$T^V(i,j) = \sigma^{d-1} \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma v_{ij})\, \underbrace{\theta(-\hat\sigma v_{ij})}\, \underbrace{\delta(r_{ij} - \sigma\hat\sigma)}_{|r_{ij}| = \sigma}$$; $\hat\sigma = \frac{r_{ij}}{|r_{ij}|}$

$\hat\sigma v_{ij} > 0$: ∄ collision : $T^V(i,j) > 0$
$\partial_t f$ augmente si ∃ annihilation

$\hat\sigma v_{ij} < 0$: ∃ collision : $T^V(i,j) < 0$
$\partial_t f$ diminue si ∃ annihilation

décrit si une collision peut être réalisée pour une configuration donnée de v_i, v_j, r_i, r_j
• $-\hat\sigma v_{ij} > 0$: ∃ collision
• $-\hat\sigma v_{ij} < 0$: ∄ collision

$\hat\sigma = \frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|} \Rightarrow \delta(r_{ij} - \sigma\hat\sigma) \equiv$ collision

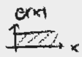
Annihilation probabiliste : – soit $\boxed{p = \text{probabilité d'annihilation}}$, alors dans la limite $p \to 1$ on devra retrouver les résultats de l'article, et la limite $p \to 0^+$ quelque chose de similaire à ce qui est fait dans la littérature pour les gaz inélastiques. Limite plus délicate à prendre.

⚠ on peut supposer que dès que $p > 1$, la limite de Grad s'applique (il suffit d'attendre assez longtemps) de sorte que la hiérarchie se réduit à l'éq. de Boltzmann.

– équation pour l'annihilation pure :

$$(\partial_t + v_1 \partial_{r_1}) f(1,t) = \int d2\, T^V(1,2) f(1,t) f(2,t)$$; $d2 = dr_2 dv_2$

$$T^V(i,j) = \sigma^{d-1} \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma \cdot v_{ij})\, \theta(-\hat\sigma v_{ij})\, \delta(r_{ij} - \sigma\hat\sigma)$$; $\hat\sigma = r_{ij}/|r_{ij}|$



c'est ce terme qui dit s'il y a eu une collision ou non
– si ∄ de collision : ne change rien
– si ∃ collision, alors ⟺ $-\hat\sigma v_{ij} > 0$, et dans ce cas,
⇒ tient compte de l'aspect probabiliste dans les collisions : si $(-\hat\sigma v_{ij}) > 0$, alors
– avec proba. p on a $T^V(i,j)$
– avec proba. $1-p$ on a un nouveau terme décrivant la collision

$$T^V(i,j) \longrightarrow \underbrace{p\, T^V(i,j)}_{\text{annihilation}} + \underbrace{(1-p)\, T_c^V(i,j)}_{\text{collision ; chocs élastiques } \alpha \in]0,1]}$$

(ci-dessus)

$$T_c^V(i,j) = -\sigma^{d-1} \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma v_{ij})\, \theta(-\hat\sigma v_{ij})\, \delta(r_{ij} - \sigma\hat\sigma) \left(\frac{1}{\alpha^2} b^{-1} - 1\right)$$

⚠ : le signe ⊖ devant vient du fait que si on le simplifie avec $\theta(-\hat\sigma \cdot v_{ij})$ on a ⊕ au résultat : en effet : le premier terme et celui de gain $1/\alpha^2 b^{-1}$ qui contribue positivement à $\partial_t f$, et le second le terme de perte.

Dérivation de l'équation de Boltzmann pour l'annihilation probabiliste :

$$(\partial_t + \cancel{v_1 \partial_{r_1}}^{0}) f(1,t) = \int d2 \left[p\, T^V(1,2) + (1-p) T_c^V(1,2) \right] f(1,t) f(2,t)$$

$$= p \int dr_2 \int dv_2\, \sigma^{d-1} \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma v_{12})\, \theta(-\hat\sigma v_{12})\, \delta(r_{12} - \sigma\hat\sigma)\, f(r_1,v_1,t) f(r_2,v_2,t)$$

$$+ \underbrace{(1-p) \int dr_2 \int dv_2\, \sigma^{d-1} \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma v_{12})\, \theta(+\hat\sigma v_{12})\, \delta(r_{12} - \sigma\hat\sigma) \left[\frac{1}{\alpha^2} b^{-1} - 1\right] f(r_1,v_1,t) f(r_2,v_2,t)}_{:= I_c}$$

$$= p\sigma^{d-1} \int dv_2 \int dr_2 \int d\hat\sigma\, \underbrace{(\hat\sigma v_{12})}_{= (\hat\sigma \hat v_{12})|v_{12}|}\, \theta(-\hat\sigma v_{12})\, \underbrace{\delta(r_{12} - \sigma\hat\sigma)}_{\substack{r_1 \to r_1 \\ r_2 \to r_1 + \sigma}}\, f(r_1,v_1,t) f(r_2,v_2,t) + (1-p) I_c$$

$$= p\sigma^{d-1} f(r_1,v_1,t) \int dv_2 \int d\hat\sigma\, \underbrace{(\hat\sigma \hat v_{12})}_{\substack{\text{isotropie :}\\ \text{ne dépend pas de } \hat v_1}} |v_{12}|\, \underbrace{f(r_1 + \sigma, v_2, t)}_{\substack{\text{homogène} = f(v_2,t)\\ \text{ds limite de Grad.}}}\, \underbrace{\theta(-\hat\sigma v_{12})}_{= -\theta(\hat\sigma \hat v_{12})} + (1-p) I_c$$

$$= -p\sigma^{d-1} \underbrace{\left(\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma \hat v_{12})\, \theta(\hat\sigma \hat v_{12})\right)}_{= \text{constante} := \beta_1} f(v_1,t) \int dv_2\, |v_{12}|\, f(v_2,t) + (1-p) I_c$$

$$= -p\, \underbrace{\sigma^{d-1} \beta_1 \int dv_2\, |v_{12}|\, f(v_2,t)}_{:= \nu(v_1,t)}\, f(v_1,t) + (1-p) I_c$$

$$I_c = \int dr_2 \int dv_2\, \sigma^{d-1} \int d\hat\sigma\, \underbrace{(\hat\sigma v_{12})}_{= (\hat\sigma \hat v_{12})|v_{12}|}\, \theta(+\hat\sigma v_{12})\, \underbrace{\delta(r_{12} - \sigma\hat\sigma)}_{\substack{\text{et homogénéité}\\ \text{de la solution}\\ \vec f = f(v,t)}} \left[\frac{1}{\alpha^2} b^{-1} - 1\right] f(r_1,v_1,t) f(r_2,v_2,t)$$

; ⚠ ici b^{-1} introduit une dépendance angulaire dans f, de sorte que la factorisation de β_1 n'est pas possible.

$$= \sigma^{d-1} \int dv_2 \int d\hat\sigma\, \theta(+\hat\sigma \hat v_{12})(\hat\sigma \hat v_{12})|v_{12}| \left[b^{-1}/\alpha^2 - 1\right] f(v_1,t) f(v_2,t)$$

$$= \sigma^{d-1} \int dv_2 \int d\hat\sigma\, \theta(+\hat\sigma \hat v_{12})(\hat\sigma \hat v_{12})|v_{12}| \left[\frac{1}{\alpha^2} f(v_1',t) f(v_2',t) - f(v_1,t) f(v_2,t)\right]$$; $v_{\frac{1}{2}}' = v_{\frac{1}{2}} \mp \frac{1+\alpha}{2\alpha}(v_{\frac{1}{2}}\hat\sigma)\hat\sigma$

Résumé :

$$\begin{cases} \partial_t f(v_1,t) = -p\,\nu(v_1,t)\,f(v_1,t) + (1-p)\,I_c \\ \nu(v_1,t) = \sigma^{d-1}\beta_1 \int dv_2\,|v_{12}|\,f(v_2,t) & ;\ \beta_1 = \int d\hat\sigma\,(\hat\sigma\,\hat v_{12})\,\theta(\hat\sigma\,\hat v_{12}) = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\Gamma(\frac{d+1}{2}) \\ I_c = \sigma^{d-1}\int dv_2 \int d\hat\sigma\,\Theta(+\hat\sigma\,\hat v_{12})\,(\hat\sigma\,\hat v_{12})\,|v_{12}|\left[\frac{1}{\alpha^2} f(v_1',t)f(v_2',t) - f(v_1,t)f(v_2,t)\right] & ;\ v_{1/2}' = v_{1/2} \mp \frac{1+\alpha}{2}(v_{1/2}\cdot\hat\sigma)\hat\sigma \end{cases}$$

• Dérivation d'une nouvelle forme pour l'équation de Boltzmann, faisant intervenir des moments.

$$\partial_t f(v_1,t) = -p\,\sigma^{d-1}\beta_1\, f(v_1,t)\int dv_2\,|v_{12}|\,f(v_2,t) + (1-p)\,\sigma^{d-1}\int dv_2\int d\hat\sigma\,\Theta(+\hat\sigma\,\hat v_{12})(\hat\sigma\,\hat v_{12})\,|v_{12}|\left(\frac{1}{\alpha^2}f(v_1',t)f(v_2',t) - f(v_1,t)f(v_2,t)\right)$$

Ansatz :

$$f(v,t) = \frac{n(t)}{v_0(t)^d}\,\tilde f\left(\frac{v}{v_0}\right) \quad ;\ c = v/v_0\ ;\ v_0 = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \left(\frac{1}{n(t)}\int dv\,v^2 f(v,t)\right)^{1/2} \quad ;\ dc = dv/v_0^d$$

RHS :

$$-p\sigma^{d-1}\beta_1 f(v_1,t)\int dv_2\,|v_{12}|\,f(v_2,t) = -p\sigma^{d-1}\beta_1\,\frac{n}{v_0^d}\,\tilde f(c_1)\int dc_2\,\cancel{v_0^d}\,v_0\,|c_{12}|\,\frac{n}{\cancel{v_0^d}}\,\tilde f(c_2)$$

$$= -p\sigma^{d-1}\frac{n^2}{v_0^{d-1}}\beta_1\int dc_2\,|c_{12}|\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2)$$

$$(1-p)\sigma^{d-1}\int dv_2\int d\hat\sigma\,\Theta(+\hat\sigma\,\hat v_{12})(\hat\sigma\,\hat v_{12})\,|v_{12}|\left[\frac{1}{\alpha^2}f(v_1',t)f(v_2',t) - f(v_1,t)f(v_2,t)\right]$$

$$= (1-p)\sigma^{d-1}\int dc_2\,v_0^d\int d\hat\sigma\,\Theta(+\hat\sigma\,\hat v_{12})(\hat\sigma\,\hat v_{12})\,v_0\,|c_{12}|\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde f(c_1')\tilde f(c_2') - \tilde f(c_1)\tilde f(c_2)\right]\frac{n^2}{v_0^{2d}}$$

$$= (1-p)\sigma^{d-1}\frac{n^2}{v_0^{d-1}}\int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(+\hat\sigma\,\hat c_{12})(\hat\sigma\,\hat c_{12})\,|c_{12}|\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde f(c_1')\tilde f(c_2') - \tilde f(c_1)\tilde f(c_2)\right]$$

LHS :

$$\partial_t f(v_1,t) = \partial_t\left(\frac{n(t)}{v_0(t)^d}\tilde f(c_1)\right) = \partial_t n(t)\,\frac{1}{v_0^d}\tilde f(c_1) - \frac{1}{v_0^{d+1}}\,d\cdot n(t)\,\tilde f(c_1)\,\frac{dv_0}{dt} + \frac{n(t)}{v_0^d}\,\underbrace{\frac{\partial c_1}{\partial t}}_{=\frac{\partial}{\partial t}\frac{v_1}{v_0} = -\frac{1}{v_0^2}v_1\frac{\partial}{\partial t}v_0 = -\frac{c_1}{v_0}\partial_t v_0}\frac{\partial}{\partial c_1}\tilde f(c_1)$$

$$= \frac{n(t)}{v_0^d}\left[\frac{1}{n(t)}\partial_t n(t)\,\tilde f(c_1) - \frac{1}{v_0}\partial_t v_0(t)\,d\,\tilde f(c_1) - \frac{c_1}{v_0}\partial_t v_0(t)\,\nabla_{c_1}\tilde f(c_1)\right]$$

$$= \frac{n(t)}{v_0^d}\left[\partial_t\ln(n(t)) - \partial_t\ln(v_0(t))\cdot d - \partial_t\ln(v_0(t))\,c_1\nabla_{c_1}\tilde f(c_1)\right]$$

$$= \frac{n(t)}{v_0^d}\left[\partial_t\ln(n) - \partial_t\ln(v_0)\left\{d + c_1\nabla_{c_1}\right\}\tilde f(c_1)\right]$$

Met tout ensemble : LHS = RHS :

$$\cancel{\frac{n(t)}{v_0^d}}\left[\partial_t\ln(n) - \partial_t\ln(v_0)\left(d + c_1\nabla_{c_1}\right)\right]\tilde f(c_1) = -p\,\sigma^{d-1}\frac{n^{\cancel{2}}}{v_0^{\cancel{d-1}}}\beta_1\int dc_2\,|c_{12}|\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2)$$
$$+ (1-p)\,\sigma^{d-1}\frac{n^{\cancel{2}}}{v_0^{\cancel{d-1}}}\int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(+\hat\sigma\,\hat c_{12})(\hat\sigma\,\hat c_{12})\,|c_{12}|\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde f(c_1')\tilde f(c_2') - \tilde f(c_1)\tilde f(c_2)\right]$$

Or (36) et (37) de l'article Emmanuel $\Rightarrow$ (avec un p qui multiplie car $dn/dt = -p\cdot w(t)\cdot n$ maintenant)

$$\begin{cases} \ln(n) = -\xi p\ln\left(1 + \frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t\right) + \ln(n_0) & \Rightarrow\ \partial_t\ln(n) = -\xi\,\frac{\frac{1+\alpha}{2}\omega_0}{1 + \frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t}\cdot p \\ \ln(v_0) = -\gamma p\ln\left(1 + \frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t\right) + \ln(\bar v_0) & \Rightarrow\ \partial_t\ln(v_0) = -\gamma\,\frac{\frac{1+\alpha}{2}\omega_0}{1 + \frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t}\cdot p \end{cases}$$

$$\Rightarrow p\,\frac{\frac{1+\alpha}{2}\omega_0}{1 + \frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t}\left[-\xi + \gamma\left(d + c_1\nabla_{c_1}\right)\right]\tilde f(c_1) = -p\sigma^{d-1}n(t)v_0(t)\beta_1\int dc_2\,|c_{12}|\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2)$$
$$+ (1-p)\,\sigma^{d-1}n(t)\,v_0(t)\int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(+\hat\sigma\,\hat c_{12})(\hat\sigma\,\hat c_{12})\,|c_{12}|\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde f(c_1')\tilde f(c_2') - \tilde f(c_1)\tilde f(c_2)\right]$$

Avec (36) et (37) $\Rightarrow$

$$n(t)v_0(t) = n_0\bar v_0\left(1 + \frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t\right)^{-(\xi+\gamma)} = n_0\bar v_0\left(1 + \frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t\right)^{-\frac{2-1+\alpha}{1+\alpha}} = n_0\bar v_0\,\frac{1}{1 + \frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow p\,\frac{\cancel{n(t)v_0(t)}}{n_0\bar v_0}\,\frac{1+\alpha}{2}\omega_0\left[-\xi + \gamma(d + c_1\nabla_{c_1})\right]\tilde f(c_1) = \cancel{n(t)v_0(t)}\left\{-p\sigma^{d-1}\beta_1\int dc_2\,|c_{12}|\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2) + (1-p)\sigma^{d-1}\int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(+\hat\sigma\,\hat c_{12})(\hat\sigma\,\hat c_{12})\,|c_{12}|\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde f(c_1')\tilde f(c_2') - \tilde f(c_1)\tilde f(c_2)\right]\right\}$$

Or :

$$\omega_0 = n_0\bar v_0\,\sigma^{d-1}\int dc_1\int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\,\hat c_{12})(\hat\sigma\,\hat c_{12})\,|c_{12}|\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2)$$
$$= n_0\bar v_0\,\sigma^{d-1}\beta_1\langle c_{12}\rangle$$
$$\xi = \frac{2}{1+\alpha} \quad ;\ \gamma = -\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$$\Rightarrow p\,\frac{1+\alpha}{2}\cancel{\sigma^{d-1}}\beta_1\langle c_{12}\rangle\left[-\frac{2}{1+\alpha} - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}(d + c_1\nabla_{c_1})\right]\tilde f(c_1) = -p\,\cancel{\sigma^{d-1}}\beta_1\int dc_2\,|c_{12}|\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2)$$
$$+ (1-p)\cancel{\sigma^{d-1}}\int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(+\hat\sigma\,\hat c_{12})(\hat\sigma\,\hat c_{12})\,|c_{12}|\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde f(c_1')\tilde f(c_2') - \tilde f(c_1)\tilde f(c_2)\right]$$

$$\Rightarrow p\langle c_{12}\rangle\left[-1 - \frac{1-\alpha}{2}(d + c_1\nabla_{c_1})\right]\tilde f(c_1) = -p\int dc_2\,|c_{12}|\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2) + \frac{1-p}{\beta_1}\int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(+\hat\sigma\,\hat c_{12})(\hat\sigma\,\hat c_{12})\,|c_{12}|\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde f(c_1')\tilde f(c_2') - \tilde f(c_1)\tilde f(c_2)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(1 + \frac{1-\alpha}{2}(d + c_1\nabla_{c_1})\right)\tilde f(c_1) = \tilde f(c_1)\frac{1}{\langle c_{12}\rangle}\int dc_2\,|c_{12}|\,\tilde f(c_2) - \frac{1-p}{p}\,\frac{1}{\langle c_{12}\rangle\beta_1}\int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\,\hat c_{12})(\hat\sigma\cdot\hat c_{12})\,|c_{12}|\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde f(c_1')\tilde f(c_2') - \tilde f(c_1)\tilde f(c_2)\right]}$$

$\beta_1 = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\Gamma(\frac{d+1}{2})$ cas particulier de $\beta_k = \int d\hat\sigma\,(\hat\sigma\,\hat v_{12})^k\,\Theta(\hat\sigma\,\hat v_{12}) = \pi^{\frac{d-1}{2}}\,\Gamma(\frac{k+1}{2})/\Gamma(\frac{k+d}{2})$.

$$c_1' = c_1 - \frac{1+\alpha}{2\alpha}(c_{12}\hat\sigma)\hat\sigma$$
$$c_2' = c_2 + \frac{1+\alpha}{2\alpha}(c_{12}\hat\sigma)\hat\sigma$$
$$\tilde I(\tilde f,\tilde f) = \int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\,\hat c_{12})(\hat\sigma\cdot\hat c_{12})\,|c_{12}|\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde f(c_1')\tilde f(c_2') - \tilde f(c_1)\tilde f(c_2)\right]$$

<u>Remarque</u> : réécriture sous une autre forme faisant intervenir des moments : utilisant

$$\int dc\, c^k \left(d + c\frac{d}{dc}\right)\tilde f(c) = -k\langle c^k\rangle$$

et en intégrant l'équation obtenue avec $\int dc_1 c_1^k$ on obtient :

$$\langle c_{12}\rangle \underbrace{\int dc_1\, c_1^k \tilde f(c_1)}_{=\langle c_1^k\rangle} + \langle c_{12}\rangle \frac{1-\alpha}{2}\underbrace{\int dc_1\, c_1^k\left(d + c_1\frac{d}{dc_1}\right)\tilde f(c_1)}_{=-k\langle c_1^k\rangle} = \overbrace{\int dc_1\, c_1^k \int dc_2\, \tilde f(c_1)\tilde f(c_2)\,|c_{12}|}^{=\langle c_{12} c_1^k\rangle}$$

$$- \frac{1-p}{p}\frac{1}{\beta_1}\underbrace{\int dc_1\int dc_2\int d\hat\sigma\, \Theta(\hat\sigma \hat c_{12})(\hat\sigma\hat c_{12})|c_{12}|\, c_1^k\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde f(c_1')\tilde f(c_2') - \tilde f(c_1)\tilde f(c_2)\right]}_{:=-\mu_k \;:\text{ même déf. que Noije}}$$

$$\Longrightarrow \langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle - k\frac{1-\alpha}{2}\langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle = \langle c_{12} c_1^k\rangle + \frac{1-p}{p}\frac{1}{\beta_1}\mu_k$$

$$\Longrightarrow 1 - \frac{k}{2}(1-\alpha) = \frac{\langle c_{12} c_1^k\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle} + \frac{1-p}{p}\frac{1}{\beta_1}\frac{\mu_k}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle}$$

$$\Longrightarrow \frac{k}{2}(\alpha-1) = \frac{\langle c_{12} c_1^k\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle} - 1 + \frac{1-p}{p}\frac{1}{\beta_1}\frac{\mu_k}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha = 1 + \frac{2}{k}\left(\frac{\langle c_{12} c_1^k\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle} - 1\right) + \frac{1-p}{p}\frac{2}{k}\frac{1}{\beta_1}\frac{\mu_k}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle}} \quad ; \quad \alpha = \frac{\langle c_{12} c_1^2\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^2\rangle}$$

A priori cette relation diverge si $p\to 0$, mais en fait il faut d'abord calculer μ_k, puis insérer $a_2(p)$, et probablement que la divergence apparente disparaît alors. Comme μ_k est la même définition que dans Noije-Ernst, alors on a directement (⚠ leur gaussienne diffère de la nôtre) $\mu_k = \mu_k(a_2)$ connu $\Longrightarrow$ on tire tout de suite a_2. On considère donc le développement de Sonine :

$$\begin{cases} \tilde f(c) = \mathcal{M}(c)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n(c^2)\right] \\ \mathcal{M}(c) = \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{d/2} e^{-d/2\, c^2} \end{cases} \quad ; \quad S_0(x) = 1 \;;\; S_1(x) = \frac{d}{2}(1-x) \;;\; S_2(x) = \frac{d^2}{8}x^2 - \frac{d(d+2)}{4}x + \frac{d(d+2)}{8}$$

Lien avec Noije-Ernst : comme en général on a tjs une éqn. du type $G\tilde f(c_1) = \tilde I(\tilde f,\tilde f)$ pour les différents thermostats, alors le calcul de la limite $\tilde I = \lim_{c_1\to 0}\tilde I(\tilde f,\tilde f)$ peut être utilisé pour tous les thermostats.

$\boxed{\text{Calcul de } \tilde I = \lim_{c_1\to 0}\tilde I(\tilde f,\tilde f) :}$

$$\tilde I = \lim_{c_1\to 0}\int dc_2\int d\hat\sigma\, \Theta(\hat\sigma c_{12})(\hat\sigma \hat c_{12})|c_{12}|\Big[\underbrace{\frac{1}{\alpha^2}\tilde f(c_1')\tilde f(c_2')}_{\text{terme de gain}} - \underbrace{\tilde f(c_1)\tilde f(c_2)}_{\text{terme de perte}}\Big] = \tilde I_g + \tilde I_p \quad , \quad \hat\sigma = \frac{c_1 - c_2}{|c_1 - c_2|}$$

• <u>terme de perte</u> :

$$\tilde I_p = -\lim_{c_1\to 0}\int dc_2\int d\hat\sigma\, \Theta(\hat\sigma c_{12})(\hat\sigma \hat c_{12})|c_{12}|\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2) = \int dc_2 \underbrace{\int d\hat\sigma\, \Theta(\hat\sigma c_2)(\hat\sigma \hat c_2)}_{=\beta_1}|c_2|\,\tilde f(0)\tilde f(c_2)$$

$$= -\beta_1 \tilde f(0)\underbrace{\int dc_2\, |c_2|\tilde f(c_2)}_{=\langle c_2\rangle} \quad ; \tilde f(c) = \mathcal{M}(c)(1 + a_2 S_2(c^2)) \;;\; \beta_1 = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right) \;;\; \mathcal{M}(0) = \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{d/2} \;;\; \langle c_2\rangle = \left(1 - \frac{a_2}{8}\right)\langle c_2\rangle_0 \;;\; \langle c_2\rangle_0 = \sqrt{\frac{2}{d}}\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}$$

$$= -\frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\cancel{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}}\mathcal{M}(0)\sqrt{\frac{2}{d}}\cancel{\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)}/\Gamma(d/2)\left(1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\left(1 - \frac{a_2}{8}\right) \quad ; \quad S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

$$= -\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(d/2)}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt\pi}\sqrt{\frac{2}{d}}\mathcal{M}(0)\left(1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\left(1 - \frac{a_2}{8}\right)$$

$$= -\frac{S_d\mathcal{M}(0)}{2\sqrt\pi}\sqrt{\frac{2}{d}}\left(1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\left(1 - \frac{a_2}{8}\right)$$

• <u>terme de gain</u> :

$$\tilde I_g = +\lim_{c_1\to 0}\int dc_2\int d\hat\sigma\, \Theta(\hat\sigma \hat c_{12})(\hat\sigma\cdot\hat c_{12})|c_{12}|\frac{1}{\alpha^2}\tilde f\left(c_1 - \frac{1+\alpha}{2\alpha}(c_{12}\cdot\hat\sigma)\hat\sigma\right)\tilde f\left(c_2 + \frac{1+\alpha}{2\alpha}(c_{12}\cdot\hat\sigma)\hat\sigma\right) \quad ; \boxed{\beta := \frac{1+\alpha}{2\alpha}} \quad ; c_{12} = c_1 - c_2$$

$$= \int dc_2\int d\hat\sigma\, \Theta(\hat\sigma \hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2|\frac{1}{\alpha^2}\tilde f\big(\beta(c_2\hat\sigma)\hat\sigma\big)\tilde f\big(c_2 - \beta(c_2\hat\sigma)\hat\sigma\big) \qquad \checkmark$$

Attention : astuce de calcul : pour la suite il est essentiel d'écrire $(\hat\sigma\hat c_2)|c_2| = (\hat\sigma c_2)$, ce qui va permettre de faire les calculs analytiques. Introduisons :

$$\begin{cases} c_x = (c_2\hat\sigma) \in \mathbb{R} \\ c_\perp = c_2 - c_x \in \mathbb{R}^{d-1} \\ c_2 = c_x + c_\perp \end{cases} \qquad \begin{aligned} [\beta(c_2\hat\sigma)\hat\sigma]^2 &= \beta^2[c_x\hat\sigma]^2 = \beta^2 c_x^2 \\ [c_2 - \beta(c_2\hat\sigma)\hat\sigma]^2 &= c_2^2 + [\beta(c_2\hat\sigma)\hat\sigma]^2 - 2c_2\beta(c_2\hat\sigma)\hat\sigma \\ &= c_x^2 + c_\perp^2 + \beta^2 c_x^2 - 2\beta c_x \underbrace{c_2\hat\sigma}_{=c_x} \\ &= c_\perp^2 + c_x^2(1 - 2\beta + \beta^2) \\ &= c_\perp^2 + c_x^2(1-\beta)^2 \end{aligned} \qquad \checkmark$$

$\Longrightarrow$

$$\tilde I_g = \int dc_2\int d\hat\sigma\, \Theta(c_x)\overbrace{(\hat\sigma c_2)}^{=c_x}\frac{1}{\alpha^2}\tilde f\big(\beta(c_2\hat\sigma)\hat\sigma\big)\tilde f\big(c_2 - \beta(c_2\hat\sigma)\hat\sigma\big)$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left(\int d\hat\sigma\right)\int_0^\infty dc_x\, c_x\int_{\mathbb{R}^{d-1}} dc_\perp\, \tilde f\big(\beta(c_2\hat\sigma)\hat\sigma\big)\tilde f\big(c_2 - \beta(c_2\hat\sigma)\hat\sigma\big) \quad ; \int d\hat\sigma := S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \text{ : surface d'une sphère en dimension } d$$

$$= \frac{S_d}{\alpha^2}\left(\frac{d}{2\pi}\right)^d\int_0^\infty dc_x\, c_x\int_{\mathbb{R}^{d-1}} dc_\perp\, e^{-\frac{d}{2}\beta^2 c_x^2}e^{-\frac{d}{2}c_\perp^2 - \frac{d}{2}c_x^2(1-\beta)^2}\left[1 + a_2 S_2(\beta^2 c_x^2)\right]\left[1 + a_2 S_2(c_\perp^2 + c_x^2(1-\beta)^2)\right]$$

$$= \frac{S_d}{\alpha^2}\left(\frac{d}{2\pi}\right)^d\int_0^\infty dc_x\, c_x\, e^{-\frac{d}{2}[\beta^2 + (1-\beta)^2]c_x^2}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} dc_\perp\, e^{-\frac{d}{2}c_\perp^2}\underbrace{\left[1 + a_2 S_2(\beta^2 c_x^2)\right]\left[1 + a_2 S_2(c_\perp^2 + c_x^2(1-\beta)^2)\right]} \qquad (*)$$

on peut ne garder que l'ordre linéaire en a_2 sans compromettre l'étude de tous les a_2 obtenus par D.L Taylor différents.] terme quadratique calculé dans ③b, ③c...

$$= 1 + a_2\cdot\left\{S_2(\beta^2 c_x^2) + S_2(c_\perp^2 + c_x^2(1-\beta)^2)\right\}$$

avec :

$$S_2(\beta^2 c_x^2) + S_2(c_\perp^2 + c_x^2(1-\beta)^2) = \frac{d(d+2)}{4} - \frac{d(d+2)}{4}\beta^2 c_x^2 - \frac{d(d+2)}{4}(c_\perp^2 + c_x^2(1-\beta)^2) + \frac{d^2}{8}c_x^4\beta^4 + \frac{d^2}{8}(c_\perp^2 + c_x^2(1-\beta)^2)^2$$

$$= \frac{d(d+2)}{4} - \frac{d(d+2)}{4}\beta^2 c_x^2 - \frac{d(d+2)}{4}c_\perp^2 - \frac{d(d+2)}{4}(1-\beta)^2 c_x^2 + \frac{d^2}{8}\beta^4 c_x^4 + \frac{d^2}{8}\left(c_\perp^4 + c_x^4(1-\beta)^4 + 2(1-\beta)^2 c_\perp^2 c_x^2\right)$$

$$= \frac{d(d+2)}{4} - \frac{d(d+2)}{4}c_\perp^2 + \frac{d^2}{8}c_\perp^4 + c_x^2\left[-\frac{d(d+2)}{4}\beta^2 - \frac{d(d+2)}{4}(1-\beta)^2\right] + c_x^4\left[\frac{d^2}{8}\beta^4 + \frac{d^2}{8}(1-\beta)^4\right] + c_x^2 c_\perp^2\frac{d^2}{8}2(1-\beta)^2$$

$$= \frac{d(d+2)}{4} - \frac{d(d+2)}{4}c_\perp^2 + \frac{d^2}{8}c_\perp^4 - \frac{d(d+2)}{4}\left[\beta^2 + (1-\beta)^2\right]c_x^2 + \frac{d^2}{8}\left[\beta^4 + (1-\beta)^4\right]c_x^4 + \frac{d^2}{4}(1-\beta)^2 c_x^2 c_\perp^2 \qquad \checkmark$$

Calcul du terme quadratique dans la limite : on a négligé dans (*) le terme en a_2^2 : (utilisé : article ambiguités)

$$\cdot\, S_2(\beta^2 C_x^2) S_2(C_\perp^2 + C_x^2(1-\beta)^2) = \left[\frac{d^2}{8}\beta^4 C_x^4 - \frac{d(d+2)}{4}\beta^2 C_x^2 + \frac{d(d+2)}{8}\right]\left[\frac{d^2}{8}(C_\perp^2 + C_x^2(1-\beta)^2)^2 - \frac{d(d+2)}{4}(C_\perp^2 + C_x^2(1-\beta)^2) + \frac{d(d+2)}{8}\right]$$

$$= \left[\frac{d^2}{8}\beta^4 C_x^4 - \frac{d(d+2)}{4}\beta^2 C_x^2 + \frac{d(d+2)}{8}\right]\left[\frac{d^2}{8}C_\perp^4 + \frac{d^2}{8}C_x^4(1-\beta)^4 + \frac{d^2}{4}C_\perp^2 C_x^2(1-\beta)^2 - \frac{d(d+2)}{4}C_\perp^2 - \frac{d(d+2)}{4}C_x^2(1-\beta)^2 + \frac{d(d+2)}{8}\right]$$

$$= \left(\frac{d^2}{8}\right)^2\beta^4 C_x^4 C_\perp^4 + \left(\frac{d^2}{8}\right)^2\beta^4(1-\beta)^4 C_x^8 + \frac{d^2}{8}\frac{d^2}{4}\beta^4(1-\beta)^2 C_\perp^2 C_x^6 - \frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}\beta^4 C_x^4 C_\perp^2 - \frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}\beta^4(1-\beta)^2 C_x^6$$
$$+ \frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{8}\beta^4 C_x^4 - \frac{d(d+2)}{4}\frac{d^2}{8}\beta^2 C_x^2 C_\perp^4 - \frac{d(d+2)}{4}\frac{d^2}{8}\beta^2(1-\beta)^4 C_x^6 - \frac{d(d+2)}{4}\frac{d^2}{4}\beta^2(1-\beta)^2 C_\perp^2 C_x^4$$
$$+ \frac{d(d+2)}{4}\frac{d(d+2)}{4}\beta^2 C_x^2 C_\perp^2 + \frac{d(d+2)}{4}\frac{d(d+2)}{4}\beta^2(1-\beta)^2 C_x^4 - \frac{d(d+2)}{4}\frac{d(d+2)}{8}\beta^2 C_x^2$$
$$+ \frac{d(d+2)}{8}\frac{d^2}{8}C_\perp^4 + \frac{d(d+2)}{8}\frac{d^2}{8}(1-\beta)^4 C_x^4 + \frac{d(d+2)}{8}\frac{d^2}{4}C_\perp^2 C_x^2(1-\beta)^2 - \frac{d(d+2)}{8}\frac{d(d+2)}{4}C_\perp^2 - \frac{d(d+2)}{8}\frac{d(d+2)}{4}(1-\beta)^2 C_x^2$$
$$+ \left(\frac{d(d+2)}{8}\right)^2$$

$$= \left(\frac{d^2}{8}\right)^2\beta^4 C_x^4 C_\perp^4 + \left(\frac{d^2}{8}\right)^2\beta^4(1-\beta)^4 C_x^8 + 2\left(\frac{d^2}{8}\right)^2\beta^4(1-\beta)^2 C_x^6 C_\perp^2$$
$$+ C_x^4 C_\perp^2\left[-\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}\beta^4 - \frac{d(d+2)}{4}\frac{d^2}{4}\beta^2(1-\beta)^2\right] + C_x^6\cdot\left[-\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}\beta^4(1-\beta)^2 - \frac{d(d+2)}{4}\frac{d^2}{8}\beta^2(1-\beta)^4\right]$$
$$+ C_x^4\cdot\left[\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{8}\beta^4 + \frac{d(d+2)}{4}\frac{d(d+2)}{4}\beta^2(1-\beta)^2 + \frac{d(d+2)}{8}\frac{d^2}{8}(1-\beta)^4\right] - \frac{d(d+2)}{4}\frac{d^2}{8}\beta^2 C_x^2 C_\perp^4$$
$$+ C_x^2 C_\perp^2\cdot\left[\frac{d(d+2)}{4}\frac{d(d+2)}{4}\beta^2 + \frac{d(d+2)}{8}\frac{d^2}{4}(1-\beta)^2\right] + C_x^2\left[-\frac{d(d+2)}{4}\frac{d(d+2)}{8}\beta^2 - \frac{d(d+2)}{8}\frac{d(d+2)}{4}(1-\beta)^2\right]$$
$$+ \frac{d(d+2)}{8}\frac{d^2}{8}C_\perp^4 - \frac{d(d+2)}{8}\frac{d(d+2)}{4}C_\perp^2 + \left(\frac{d(d+2)}{8}\right)^2$$

$$= \alpha_{44} C_x^4 C_\perp^4 + \alpha_{80} C_x^8 + \alpha_{62} C_x^6 C_\perp^2 + \alpha_{42} C_x^4 C_\perp^2 + \alpha_{60} C_x^6 + \alpha_{40} C_x^4 + \alpha_{24} C_x^2 C_\perp^4 + \alpha_{22} C_x^2 C_\perp^2$$
$$+ \alpha_{20} C_x^2 + \alpha_{04} C_\perp^4 + \alpha_{02} C_\perp^2 + \alpha_{00}$$

Avec :

$$\alpha_{44} = \left(\frac{d^2}{8}\right)^2\beta^4$$

$$\alpha_{80} = \left(\frac{d^2}{8}\right)^2\beta^4(1-\beta)^4$$

$$\alpha_{62} = 2\left(\frac{d^2}{8}\right)^2\beta^4(1-\beta)^2$$

$$\alpha_{42} = -\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}\beta^2\left[\beta^2 + 2(1-\beta)^2\right]$$

$$\alpha_{60} = -\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}\beta^2(1-\beta)^2\left[\beta^2 + (1-\beta)^2\right]$$

$$\alpha_{40} = \frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{8}\left[\beta^4 + (1-\beta)^4\right] + \left(\frac{d(d+2)}{4}\right)^2\beta^2(1-\beta)^2$$

$$\alpha_{24} = -\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}\beta^2$$

$$\alpha_{22} = \frac{d}{4}\frac{d(d+2)}{4}\left[(d+2)\beta^2 + \frac{d}{2}(1-\beta)^2\right] = \left(\frac{d(d+2)}{4}\right)^2\beta^2 + \frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}(1-\beta)^2$$

$$\alpha_{20} = -\frac{d(d+2)}{4}\frac{d(d+2)}{8}\left[\beta^2 + (1-\beta)^2\right]$$

$$\alpha_{04} = \frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{8}$$

$$\alpha_{02} = -\frac{d(d+2)}{8}\frac{d(d+2)}{4}$$

$$\alpha_{00} = \left(\frac{d(d+2)}{8}\right)^2$$

et donc :

$$S_2(\beta^2 C_x^2) S_2(C_\perp^2 + C_x^2(1-\beta)^2) = \sum_{\substack{i=2k \\ j=2p \\ i+j\leq 8}}^{\substack{k\leq 8 \\ p\leq 4}} \alpha_{ij} C_x^i C_\perp^j \quad ; \; \Omega = \left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \text{ t.q. } i=2k, j=2p ; i+j\leq 8 ; k\leq 8 ; p\leq 4, k,p\in\mathbb{N}\right\}$$
$$= \{(0,0) ; (0,2) ; (0,4) ; (2,0) ; (2,2) ; (2,4) ; (4,0) ; (4,2) ; (4,4) ; (6,0) ; (6,2) ; (8,0)\}$$

Soit :
$$\begin{cases} \gamma_x = \frac{d}{2}\left[\beta^2 + (1-\beta)^2\right] \\ \gamma_\perp = d/2 \\ J_\perp[n] = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx\, e^{-\gamma_\perp x^2}|x|^n \\ J_x[n] = \int_0^\infty dx\, e^{-\gamma_x x^2}|x|^n \end{cases}$$

Alors le terme en ordre a_2^2 donne la contribution :

$$\tilde{I}_{g,2} = \frac{S_d}{\alpha^2}\left(\frac{d}{2\pi}\right)^d \int_0^\infty dC_x\, C_x e^{-\gamma_x C_x^2}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} dC_\perp e^{-\gamma_\perp C_\perp^2}\, a_2^2 \sum_{i,j\in\Omega}\alpha_{ij} C_x^i C_\perp^j$$

$$= \frac{S_d}{\alpha^2}\left(\frac{d}{2\pi}\right)^d a_2^2 \sum_{i,j\in\Omega}\alpha_{ij}\, J_x[i+1] J_\perp[j]$$

Avec (c.f. page 4) :

$$J_x[1] = \tfrac{1}{2}\Gamma(1)/\gamma_x = 1/2\gamma_x$$
$$J_x[3] = \tfrac{1}{2}\Gamma(2)/\gamma_x^2 = 1/2\gamma_x^2$$
$$J_x[5] = \tfrac{1}{2}\Gamma(3)/\gamma_x^3 = 1/\gamma_x^3$$
$$J_x[7] = \tfrac{1}{2}\Gamma(4)/\gamma_x^4 = 3/\gamma_x^4$$
$$J_x[9] = \tfrac{1}{2}\Gamma(5)/\gamma_x^5 = 12/\gamma_x^5$$
$$J_\perp[0] = (\pi/\gamma_\perp)^{\frac{d-1}{2}}$$
$$J_\perp[2] = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\gamma_\perp^{\frac{d+1}{2}}\cdot\frac{d-1}{2}$$
$$J_\perp[4] = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\gamma_\perp^{\frac{d+3}{2}}\cdot\frac{d+1}{2}\,\frac{d-1}{2}$$

Simplification des différents termes : met $J_x[1]\,J_\perp[0]$ en évidence et regarde les termes en $J_x[k]$ pour k fixé :

$J_x[1]$:
$$\frac{1}{J_x[1]J_\perp[0]}\Big[\alpha_{00}\,J_x[1]\,J_\perp[0]+\alpha_{02}\,J_x[1]\,J_\perp[2]+\alpha_{04}\,J_x[1]\,J_\perp[4]\Big]$$
$$=\alpha_{00}+\alpha_{02}\frac{J_\perp[2]}{J_\perp[0]}+\alpha_{04}\frac{J_\perp[4]}{J_\perp[0]}$$
$$=\alpha_{00}+\alpha_{02}\frac{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}{\gamma_\perp^{\frac{d+1}{2}}}\,\frac{d-1}{2}\,\frac{\gamma_\perp^{\frac{d-1}{2}}}{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}+\alpha_{04}\frac{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}{\gamma_\perp^{\frac{d+3}{2}}}\,\frac{d+1}{2}\,\frac{d-1}{2}\,\frac{\gamma_\perp^{\frac{d-1}{2}}}{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}$$
$$=\alpha_{00}+\alpha_{02}\frac{d-1}{2}\frac{1}{\gamma_\perp}+\alpha_{04}\frac{d+1}{2}\frac{d-1}{2}\frac{1}{\gamma_\perp^2}$$
$$=\left(\frac{d(d+2)}{8}\right)^2-\frac{d(d+2)}{8}\,\frac{d(d+2)}{8}\cdot 2\,\frac{d-1}{2}\,\frac{2}{d}+\frac{\cancel{d^2}}{8}\,\frac{d(d+2)}{8}\,\frac{d+1}{2}\,\frac{d-1}{2}\,\frac{4}{\cancel{d^2}}$$
$$=\frac{d(d+2)}{8}\cdot\left[\frac{d(d+2)}{8}-\frac{\cancel{d}(d+2)}{8}\,\frac{4}{\cancel{d}}\,\frac{d-1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{d+1}{2}\,\frac{d-1}{2}\right]$$
$$=\frac{d(d+2)}{64}\cdot\Big[d^2+2d-(d+2)(d-1)\cdot 2+(d+1)(d-1)\Big]$$
$$=\frac{d(d+2)}{64}\cdot\Big[d^2+2d+(d-1)\cdot\big\{\underbrace{d+1-2d-4}_{=-d-3}\big\}\Big]$$
$$=\frac{d(d+2)}{64}\cdot\Big[\cancel{d^2}+\cancel{2d}-\cancel{d^2}+\cancel{d}-\cancel{3d}+3\Big]$$
$$=\frac{3d(d+2)}{64}\qquad ✓$$

$J_x[3]$:
$$\frac{1}{J_x[1]J_\perp[0]}\Big[\alpha_{20}\,J_x[3]J_\perp[0]+\alpha_{22}\,J_x[3]J_\perp[2]+\alpha_{24}\,J_x[3]J_\perp[4]\Big]$$
$$=\alpha_{20}\frac{J_x[3]}{J_x[1]}+\alpha_{22}\frac{J_x[3]}{J_x[1]}\cdot\frac{J_\perp[2]}{J_\perp[0]}+\alpha_{24}\frac{J_x[3]}{J_x[1]}\,\frac{J_\perp[4]}{J_\perp[0]}$$
$$=\alpha_{20}\frac{1}{2\gamma_x^2}2\gamma_x+\alpha_{22}\frac{1}{\gamma_x}\,\frac{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}{\gamma_\perp^{\frac{d+1}{2}}}\,\frac{d-1}{2}\,\frac{\gamma_\perp^{\frac{d-1}{2}}}{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}+\alpha_{24}\frac{1}{\gamma_x}\,\frac{d+1}{2}\,\frac{d-1}{2}\,\frac{1}{\gamma_\perp^2}$$
$$=\alpha_{20}\frac{1}{\gamma_x}+\alpha_{22}\frac{1}{\gamma_x}\frac{d-1}{2}\frac{1}{\gamma_\perp}+\alpha_{24}\frac{1}{\gamma_x}\frac{d+1}{2}\frac{d-1}{2}\frac{1}{\gamma_\perp^2}$$
$$=-2\left(\frac{d(d+2)}{8}\right)^2\underbrace{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]}_{=\frac{2}{d}\gamma_x}\frac{1}{\gamma_x}+\alpha_{22}\frac{1}{\gamma_x}\frac{d-1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{d}-\frac{\cancel{d^2}}{8}\,\frac{d(d+2)}{4}\beta^2\frac{1}{\gamma_x}\frac{d+1}{\cancel{2}}\frac{d-1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{4}}{\cancel{d^2}}$$
$$=-2\,d\left(\frac{d+2}{8}\right)^2\cdot 2\cdot 2\tfrac{1}{2}+\alpha_{22}\frac{1}{\gamma_x}\,\frac{2(d-1)}{d}\frac{1}{2}-\frac{d(d+2)}{4\cdot 4}\beta^2(d+1)(d-1)\frac{1}{\gamma_x}\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{d(d+2)^2}{2\cdot 8}+\frac{\cancel{d}}{\cancel{4}}\frac{d(d+2)}{2\cdot 4}\Big[(d+2)\beta^2+\tfrac{d}{2}(1-\beta)^2\Big]\frac{\cancel{2}(d-1)}{\cancel{d}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{d}}\,\frac{1}{\beta^2+(1-\beta)^2}-\frac{\cancel{d}(d+2)(d+1)(d-1)}{2\cdot 4\cdot 4}\cdot\beta^2\cdot\frac{2}{\cancel{d}}\,\frac{1}{\beta^2+(1-\beta)^2}$$
$$=-\frac{d(d+2)^2}{2\cdot 8}+\frac{(d+2)(d-1)}{2\cdot 4}\,\frac{(d+2)\beta^2+d/2\,(1-\beta)^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}-\frac{(d+2)(d+1)(d-1)}{2\cdot 8}\,\frac{\beta^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}$$
$$=-\frac{d(d+2)^2}{2\cdot 8}+\frac{(d+2)(d-1)(d+1)}{2\cdot 4}\,\frac{\beta^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}+\frac{(d+2)(d-1)}{2\cdot 4}\,\frac{\beta^2+d/2\,(1-\beta)^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}-\frac{(d+2)(d+1)(d-1)}{2\cdot 8}\,\frac{\beta^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}$$
$$=-\frac{d(d+2)^2}{2\cdot 8}+\frac{(d+2)(d+1)(d-1)}{2\cdot 8}\,\frac{\beta^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}+\frac{(d+2)(d-1)\,2}{2\cdot 8}\,\frac{\beta^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}+\frac{(d+2)(d-1)}{2\cdot 4}\,\frac{d}{2}\,\frac{(1-\beta)^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}$$
$$=-\frac{d(d+2)^2}{2\cdot 8}+\frac{\beta^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}\,\frac{(d+2)(d-1)}{2\cdot 8}\Big[2+d+1\Big]+\frac{d(d+2)(d-1)}{2\cdot 8}\,\frac{(1-\beta)^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}$$
$$=-\frac{d(d+2)^2}{2\cdot 8}+\frac{(d+3)(d+2)(d-1)}{2\cdot 8}\,\frac{\beta^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}+\frac{d(d+2)(d-1)}{2\cdot 8}\,\frac{(1-\beta)^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}\qquad ✓$$

$J_x[5]$:
$$\frac{1}{J_x[1]J_\perp[0]}\Big[\alpha_{40}\,J_x[5]\,J_\perp[0]+\alpha_{42}\,J_x[5]\,J_\perp[2]+\alpha_{44}\,J_x[5]\,J_\perp[4]\Big]$$
$$=\alpha_{40}\frac{J_x[5]}{J_x[1]}+\alpha_{42}\frac{J_x[5]}{J_x[1]}\,\frac{J_\perp[2]}{J_\perp[0]}+\alpha_{44}\frac{J_x[5]}{J_x[1]}\,\frac{J_\perp[4]}{J_\perp[0]}$$
$$=\alpha_{40}\frac{1}{\gamma_x^3}\cdot 2\gamma_x+\alpha_{42}\frac{2}{\gamma_x^2}\,\frac{d-1}{2}\,\frac{1}{\gamma_\perp}+\alpha_{44}\frac{2}{\gamma_x^2}\,\frac{d+1}{2}\,\frac{d-1}{2}\,\frac{1}{\gamma_\perp^2}$$
$$=\frac{\cancel{d^2}}{\cancel{8}}\,\frac{d(d+2)}{8}\left[\beta^4+(1-\beta)^4\right]\cancel{2}\,\frac{\cancel{4}}{\cancel{d^2}}\,\frac{1}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2}-\frac{d^2}{8}\,\frac{\cancel{d}(d+2)}{\cancel{4}}\beta^2\left[\beta^2+2(1-\beta)^2\right]\frac{\cancel{2}}{\gamma_x^2}\,\frac{d-1}{2}\,\frac{\cancel{2}}{\cancel{d}}+\left(\frac{d^2}{8}\right)^2\beta^4\frac{2}{\gamma_x^2}\,\frac{d+1}{2}\,\frac{d-1}{2}\,\frac{4}{\cancel{d^2}}$$
$$=\frac{d(d+2)}{8}\,\frac{\beta^4+(1-\beta)^4}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2}-\frac{d^2}{8}\,\frac{(d-1)(d+2)}{2}\beta^2\left[\frac{\beta^2+(1-\beta)^2}{\gamma_x^2}+\frac{(1-\beta)^2}{\gamma_x^2}\right]+\frac{\cancel{d^2}}{8\cancel{8}}\,\frac{\cancel{8}(d+1)(d-1)}{\cancel{4}}\beta^4\frac{\cancel{4}}{\cancel{d^2}}\,\frac{1}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2}$$
$$=\frac{d(d+2)}{8}\,\frac{\beta^4+(1-\beta)^4}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2}-\frac{d^2}{8}\,\frac{(d+2)(d-1)}{2}\beta^2\left[\frac{2}{d}\,\frac{1}{\gamma_x}+\frac{(1-\beta)^2}{\gamma_x^2}\right]+\frac{(d+1)(d-1)}{8}\,\frac{\beta^4}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2}$$
$$=\frac{d(d+2)}{8}\,\frac{\beta^4+(1-\beta)^4}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2}-\frac{\cancel{d^2}}{8}\,\frac{(d+2)(d-1)}{2}\,\frac{2}{\cancel{d}}\cdot\frac{2}{\cancel{d}}\,\frac{\beta^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}-\frac{\cancel{d^2}}{8}\,\frac{(d+2)(d-1)}{2}\beta^2\left(\frac{2}{\cancel{d}}\right)^2\frac{(1-\beta)^2}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2}+\frac{(d+1)(d-1)}{8}\,\frac{\beta^4}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2}$$
$$=\frac{d(d+2)}{8}\,\frac{\beta^4+(1-\beta)^4}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2}-\frac{(d+2)(d-1)}{4}\,\frac{\beta^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}-\frac{(d+2)(d-1)}{4}\,\frac{\beta^2(1-\beta)^2}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2}+\frac{(d+1)(d-1)}{8}\,\frac{\beta^4}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2}$$
$$=\frac{d(d+2)}{8}\,\frac{\beta^4+(1-\beta)^4}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2}-\frac{(d+2)(d-1)}{4}\,\frac{\beta^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}\left[1+\frac{(1-\beta)^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}\right]+\frac{(d+1)(d-1)}{8}\,\frac{\beta^4}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2}\qquad ✓$$

$$J_x[7]: \frac{1}{J_x[1]J_\perp[0]}\Big[\alpha_{60}\, J_x[7]\, J_\perp[0] + \alpha_{62}\, J_x[7]\, J_\perp[2]\Big]$$

$$= \alpha_{60}\frac{J_x[7]}{J_x[1]} + \alpha_{62}\frac{J_x[7]}{J_x[1]}\frac{J_\perp[2]}{J_\perp[0]}$$

$$= \alpha_{60}\frac{3}{\gamma_x^4}2\gamma_x + \alpha_{62}\frac{6}{\gamma_x^3}\frac{d-1}{2}\frac{1}{\gamma_\perp}$$

$$= -\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}\beta^2(1-\beta)^2\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]\frac{6}{\gamma_x^3} + 2\left(\frac{d^2}{8}\right)^2\beta^4(1-\beta)^2\frac{d-1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{d}\frac{6}{\gamma_x^3}$$

$$= -\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}\beta^2(1-\beta)^2\frac{2}{d}\gamma_x\frac{6}{\gamma_x^3} + 2\frac{\cancel{d^4}}{8^2}\frac{d-1}{\cancel{d}}\cdot 2\cdot 3\cdot\beta^4(1-\beta)^2\cdot\frac{8}{\cancel{d^3}}\frac{1}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^3}$$

$$= -\frac{\cancel{d^2}}{8}\frac{\cancel{d}(d+2)}{\cancel{4}}\frac{2}{\cancel{d}}2\cdot 3\cdot\beta^2(1-\beta)^2\frac{\cancel{4}}{\cancel{d^2}}\frac{1}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2} + \frac{3}{2}(d-1)\frac{\beta^4(1-\beta)^2}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^3}$$

$$= -\frac{3(d+2)}{2}\cdot\frac{\beta^2(1-\beta)^2}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2} + \frac{3(d-1)}{2}\frac{\beta^4(1-\beta)^2}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^3} \quad \text{v}$$

$$J_x[9]: \frac{1}{J_x[1]J_\perp[0]}\Big[\alpha_{80}\, J_x[9]\, J_\perp[0]\Big]$$

$$= \alpha_{80}\frac{J_x[9]}{J_x[1]}$$

$$= \left(\frac{d^2}{8}\right)^2\beta^4(1-\beta)^4\frac{12}{\gamma_x^5}2\gamma_x$$

$$= \frac{\cancel{d^4}}{8^2}3\cdot 8\,\beta^4(1-\beta)^4\left(\frac{2}{\cancel{d}}\right)^4\frac{1}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^4}$$

$$= \frac{3\cdot 8\cdot 2}{8}\frac{\beta^4(1-\beta)^4}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^4}$$

$$= 6\frac{\beta^4(1-\beta)^4}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^4} \quad \text{v}$$

Le résultat final est donné par:

$$\tilde{I}_{g,2} = \frac{S_d}{\alpha^2}\left(\frac{d}{2\pi}\right)^d a_2^2\, J_x[1]J_\perp[0]\sum_{i,j\in\Omega}\alpha_{ij}\frac{J_x[i+1]J_\perp[j]}{J_x[1]J_\perp[0]}$$

$$= \frac{S_d}{\alpha^2}\left(\frac{d}{2\pi}\right)^d a_2^2\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{d}\frac{1}{\beta^2+(1-\beta)^2}\left(\frac{2\pi}{d}\right)^{\frac{d-1}{2}}\sum_{i,j\in\Omega}\alpha_{ij}\frac{J_x[i+1]J_\perp[j]}{J_x[1]J_\perp[0]}$$

$$= \frac{S_d}{\alpha^2}\left(\frac{d}{2\pi}\right)^{d/2}\sqrt{\frac{d}{2\pi}}\frac{1}{d}\frac{a_2^2}{\alpha^2}\frac{1}{\beta^2+(1-\beta)^2}\sum_{i,j\in\Omega}\alpha_{ij}\frac{J_x[i+1]J_\perp[j]}{J_x[1]J_\perp[0]} \qquad ; \mathcal{M}(0) = \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{d/2}$$

$$= \frac{S_d\mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{d}}\frac{a_2^2}{\alpha^2}\frac{1}{\beta^2+(1-\beta)^2}\sum_{i,j\in\Omega}\alpha_{ij}\frac{J_x[i+1]J_\perp[j]}{J_x[1]J_\perp[0]}$$

En utilisant (c.f. p.5) :

$$\beta = \frac{1+\alpha}{2\alpha} \,;\, (1-\beta) = \frac{\alpha-1}{2\alpha} \,;\, \beta^2+(1-\beta)^2 = \frac{\alpha^2+1}{2\alpha^2} \,;\, \beta^4+(1-\beta)^4 = \frac{\alpha^4+6\alpha^2+1}{8\alpha^4} \,;\, \frac{(1-\beta)^2}{\beta^2+(1-\beta)^2} = \frac{1}{2}\frac{(\alpha-1)^2}{1+\alpha^2} \,;\, \frac{\beta^4+(1-\beta)^4}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^4+6\alpha^2+1}{(\alpha^2+1)^2}$$

$$\frac{\beta^2}{\beta^2+(1-\beta)^2} = \frac{1}{4\alpha^2}(1+\alpha)^2\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} = \frac{1}{2}\frac{(1+\alpha)^2}{1+\alpha^2} \quad ✓$$

$$\frac{(1-\beta)^2}{\beta^2+(1-\beta)^2} = \frac{1}{4\alpha^2}(\alpha-1)^2\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} = \frac{1}{2}\frac{(\alpha-1)^2}{1+\alpha^2} \quad ✓$$

$$\frac{\beta^4}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2} = \frac{(1+\alpha)^4}{(2\alpha)^4}\frac{4\alpha^4}{(\alpha^2+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{(1+\alpha)^4}{(1+\alpha^2)^2} \quad ✓$$

$$\frac{\beta^2(1-\beta)^2}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2} = \frac{(1+\alpha)^2}{4\cancel{\alpha^2}}\frac{(\alpha-1)^2}{\cancel{4\alpha^2}}\frac{\cancel{4\alpha^4}}{(1+\alpha^2)^2} = \frac{1}{4}\frac{(1+\alpha)^2(\alpha-1)^2}{(1+\alpha^2)^2} \quad ✓$$

$$\frac{\beta^4(1-\beta)^2}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^3} = \frac{\beta^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}\cdot\frac{\beta^2(1-\beta)^2}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^2} = \frac{1}{2}\frac{(1+\alpha)^2}{1+\alpha^2}\cdot\frac{1}{4}\frac{(1+\alpha)^2(\alpha-1)^2}{(1+\alpha^2)^2} = \frac{1}{8}\frac{(1+\alpha)^4(\alpha-1)^2}{(1+\alpha^2)^3} \quad ✓$$

$$\frac{\beta^4(1-\beta)^4}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^4} = \frac{(1-\beta)^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}\cdot\frac{\beta^4(1-\beta)^2}{\left[\beta^2+(1-\beta)^2\right]^3} = \frac{1}{2}\frac{(\alpha-1)^2}{1+\alpha^2}\frac{1}{8}\frac{(1+\alpha)^4(\alpha-1)^2}{(1+\alpha^2)^3} = \frac{1}{16}\frac{(1+\alpha)^4(\alpha-1)^4}{(1+\alpha^2)^4} \quad ✓$$

Le résultat final est donc:

$$\tilde{I}_{g,2} = \frac{S_d\mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{d}}\,a_2^2\frac{2}{1+\alpha^2}\Bigg[\frac{3d(d+2)}{64} - \frac{d(d+2)^2}{2\cdot 8} + \frac{(d+3)(d+2)(d-1)}{2\cdot 8}\frac{1}{2}\frac{(1+\alpha)^2}{1+\alpha^2} + \frac{d(d+2)(d-1)}{2\cdot 8}\frac{1}{2}\frac{(\alpha-1)^2}{1+\alpha^2} + \frac{d(d+2)}{8}\frac{1}{2}\frac{\alpha^4+6\alpha^2+1}{(\alpha^2+1)^2}$$

$$- \frac{(d+2)(d-1)}{4}\frac{1}{2}\frac{(1+\alpha)^2}{1+\alpha^2}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{(\alpha-1)^2}{1+\alpha^2}\right\} + \frac{(d+1)(d-1)}{8}\frac{1}{4}\frac{(1+\alpha)^4}{(1+\alpha^2)^2} - \frac{3(d+2)}{2}\frac{1}{4}\frac{(1+\alpha)^2(\alpha-1)^2}{(1+\alpha^2)^2}$$

$$+ \frac{3(d-1)}{2}\frac{1}{8}\frac{(1+\alpha)^4(\alpha-1)^2}{(1+\alpha^2)^3} + 6\frac{1}{16}\frac{(1+\alpha)^4(\alpha-1)^4}{(1+\alpha^2)^4}\Bigg] \quad \text{v}$$

$$= \frac{S_d\mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{d}}\frac{a_2^2}{8(1+\alpha^2)^5}\Big[\ \vdots\ \cdots\Big]$$

le terme de perte à l'ordre a_2^2:

$$\tilde{I}_{p,2} = -\frac{S_d\mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{d}}\left(-a_2^2\frac{d(d+2)}{8\cdot 8}\right) = \frac{S_d\mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{d}}\,a_2^2\frac{d(d+2)}{8\cdot 8}$$

La limite à l'ordre 2 est donc:

$$\tilde{I}_2 = \tilde{I}_{g,2} + \tilde{I}_{p,2}$$

Equation à résoudre (d=3):

free cooling. Stochastic thermostat: $\frac{(d+2)(d+4)}{8}$

$$\frac{1-\alpha^2}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{3}{16}a_2+\frac{9}{1024}a_2^2\right)\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{S_d\mathcal{M}(0)}\sqrt{\frac{d}{2}}\,\tilde{I}_2$$

Soit :

$$\begin{cases} \gamma_x = \frac{d}{2}[\beta^2+(1-\beta)^2] \\ \gamma_\perp = \frac{d}{2} \\ J_\perp[n] = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx\, e^{-\gamma_\perp x^2} |x|^n \\ J_x[n] = \int_0^\infty dx\, e^{-\gamma_x x^2} x^n \end{cases}$$

alors :

$$\tilde{I}_g = \frac{S_d}{\alpha^2}\left(\frac{d}{2\pi}\right)^d \int_0^\infty dc_x\, c_x e^{-\gamma_x c_x^2} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dc_\perp e^{-\gamma_\perp c_\perp^2} \left[1 + a_2 \left\{ \frac{d(d+2)}{4} - \frac{d(d+2)}{4} c_\perp^2 + \frac{d^2}{8} c_\perp^4 - \frac{d(d+2)}{4}(\beta^2+(1-\beta)^2) c_x^2 + \frac{d^2}{8}(\beta^4+(1-\beta)^4) c_x^4 + \frac{d^2}{4}(1-\beta)^2 c_x^2 c_\perp^2 \right\} \right]$$

$$= \frac{S_d}{\alpha^2}\left(\frac{d}{2\pi}\right)^d \cdot \left[J_x[1]\cdot J_\perp[0] + a_2 \left\{ \frac{d(d+2)}{4} J_x[1] J_\perp[0] - \frac{d(d+2)}{4} J_x[1] J_\perp[2] + \frac{d^2}{8} J_x[1] J_\perp[4] - \frac{d(d+2)}{4}(\beta^2+(1-\beta)^2) J_x[3] J_\perp[0] + \frac{d^2}{8}(\beta^4+(1-\beta)^4) J_x[5] J_\perp[0] + \frac{d^2}{4}(1-\beta)^2 J_x[3] J_\perp[2] \right\} \right] \quad (*)$$

Les intégrales $J_\perp[n]$ et $J_x[n]$ se calculent à l'aide de :

$$\int_{\mathbb{R}^d} d^d x\, |x|^n e^{-\alpha x^2} = \frac{\pi^{d/2}}{\alpha^{\frac{d+n}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J_x[n] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx\, |x|^n e^{-\gamma_x x^2} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma_x^{\frac{n+1}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) / \gamma_x^{\frac{n+1}{2}} \\ J_\perp[n] = \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\gamma_\perp^{\frac{d+n-1}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \end{cases}$$

En particulier :

$$\begin{cases} J_x[1] = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)/\gamma_x^{\frac{1+1}{2}} = \frac{1}{2\gamma_x} \quad \checkmark \\ J_x[3] = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)/\gamma_x^{\frac{3+1}{2}} = \frac{1}{2}\Gamma(2)/\gamma_x^2 = \frac{1}{2\gamma_x^2} \quad \checkmark \\ J_x[5] = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5+1}{2}\right)/\gamma_x^{\frac{5+1}{2}} = \frac{1}{2}\Gamma(3)/\gamma_x^3 = \frac{1}{\gamma_x^3} \quad \checkmark \\ J_\perp[0] = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\gamma_\perp^{\frac{d-1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{\gamma_\perp}\right)^{\frac{d-1}{2}} \\ J_\perp[2] = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\gamma_\perp^{\frac{d+1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{d-1}{2}+1\right)/\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\gamma_\perp^{\frac{d+1}{2}} \cdot \frac{d-1}{2} \\ J_\perp[4] = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\gamma_\perp^{\frac{d+3}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{d+1}{2}+1\right)/\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\gamma_\perp^{\frac{d+3}{2}} \cdot \frac{d+1}{2}\cdot\frac{d-1}{2} \end{cases}$$

Simplification des différents termes de (*) : met $J_x[1] J_\perp[0]$ en évidence et regarde les termes multipliés par a_2 :

$J_x[1]$:
$$\frac{1}{J_x[1] J_\perp[0]}\left[\frac{d(d+2)}{4} J_x[1] J_\perp[0] - \frac{d(d+2)}{4} J_x[1] J_\perp[2] + \frac{d^2}{8} J_x[1] J_\perp[4] \right]$$

$$= \frac{d(d+2)}{4} - \frac{d(d+2)}{4}\frac{J_\perp[2]}{J_\perp[0]} + \frac{d^2}{8}\frac{J_\perp[4]}{J_\perp[0]}$$

$$= \frac{d(d+2)}{4} - \frac{d(d+2)}{4} \frac{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}{\gamma_\perp^{\frac{d+1}{2}}} \frac{d-1}{2} \frac{\gamma_\perp^{\frac{d-1}{2}}}{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}} + \frac{d^2}{8} \frac{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}{\gamma_\perp^{\frac{d+3}{2}}} \frac{d+1}{2}\frac{d-1}{2} \frac{\gamma_\perp^{\frac{d-1}{2}}}{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}$$

$$= \frac{d(d+2)}{4} - \frac{d(d+2)}{4}\frac{d-1}{2}\frac{1}{\gamma_\perp} + \frac{d^2}{8}\frac{d+1}{2}\frac{d-1}{2}\frac{1}{\gamma_\perp^2} \quad ; \gamma_\perp = d/2$$

$$= \frac{d(d+2)}{4} - \frac{\cancel{d}(d+2)}{4}\frac{d-1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{\cancel{d}} + \frac{\cancel{d^2}}{8}\frac{d+1}{\cancel{2}}\frac{d-1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{4}}{\cancel{d^2}}$$

$$= \frac{d(d+2)}{4} - \frac{(d+2)(d-1)}{4} + \frac{(d+1)(d-1)}{8}$$

$$= \frac{1}{8}\left(2d(d+2) - 2(d+2)(d-1) + d^2 - 1\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cancel{2d^2} + 4d - \cancel{2d^2} + 2d - \cancel{4d} + 4 + d^2 - 1\right)$$

$$= \frac{1}{8}(d^2+2d+3) \quad \text{vidéo}$$

$J_x[3]$:
$$\frac{1}{J_x[1] J_\perp[0]}\left[-\frac{d(d+2)}{4}(\beta^2+(1-\beta)^2) J_x[3] J_\perp[0] + \frac{d^2}{4}(1-\beta)^2 J_x[3] J_\perp[2] \right]$$

↓ ce terme est le seul qui soit différent de Emmanuel

$$= -\underbrace{(\beta^2+(1-\beta)^2)}_{= 2/d\, \gamma_x} \frac{d(d+2)}{4} \frac{J_x[3]}{J_x[1]} + (1-\beta)^2 \frac{d^2}{4} \frac{J_x[3] J_\perp[2]}{J_x[1] J_\perp[0]}$$

$; \gamma_x = \frac{d}{2}[\beta^2+(1-\beta)^2] \Rightarrow \frac{2}{d}\gamma_x = (\beta^2+(1-\beta)^2)$

$$= -\frac{2}{\cancel{d}}\cancel{\gamma_x}\frac{\cancel{d}(d+2)}{4}\frac{1}{\cancel{2}\gamma_x^{\cancel{2}}}\cancel{2\gamma_x} + (1-\beta)^2\frac{d^2}{4}\frac{1}{2\gamma_x^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}{\gamma_\perp^{\frac{d+1}{2}}}\frac{d-1}{\cancel{2}}\cancel{2\gamma_x}\frac{\gamma_\perp^{\frac{d-1}{2}}}{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}$$

$$= -\frac{d+2}{2} + (1-\beta)^2\frac{d^2}{4}\frac{1}{2\gamma_x}\frac{1}{\gamma_\perp}(d-1)$$

$$= -\frac{d+2}{2} + (1-\beta)^2 \frac{\cancel{d^2}}{\cancel{4}}\frac{1}{2}\frac{\cancel{2}}{\cancel{d}}\frac{1}{\beta^2+(1-\beta)^2}\frac{\cancel{2}}{\cancel{d}}(d-1)$$

$$= -\frac{d+2}{2} + \frac{(1-\beta)^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}\frac{d-1}{2}$$

$=$

$$J_x[5] : \frac{1}{J_x[1]\,J_\perp[0]}\left[\frac{d^2}{8}\left(\beta^4+(1-\beta)^4\right) J_x[5]\,J_\perp[0]\right]$$
$$= \frac{d^2}{8}\left(\beta^4+(1-\beta)^4\right)\frac{J_x[5]}{J_x[1]}$$
$$= \frac{d^2}{8}\left(\beta^4+(1-\beta)^4\right)\frac{1}{\gamma_x^3}\,2\gamma_x \qquad ;\ \gamma_x = \frac{d}{2}\left(\beta^2+(1-\beta)^2\right)$$
$$= \frac{d^2}{8}\,2\,\frac{\beta^4+(1-\beta)^4}{\gamma_x^2}$$
$$= \frac{d^2}{4}\cdot\frac{4}{d^2}\,\frac{\beta^4+(1-\beta)^4}{[\beta^2+(1-\beta)^2]^2}$$
$$= \frac{\beta^4+(1-\beta)^4}{[\beta^2+(1-\beta)^2]^2}$$

Résultat final(*):

$$\tilde{I}_g = \frac{S_d}{\alpha^2}\left(\frac{d}{2\pi}\right)^d \underbrace{J_x[1]\,J_\perp[0]}_{=\frac{1}{2\gamma_x}\left(\frac{\pi}{\gamma_\perp}\right)^{\frac{d-1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{2}{d}\frac{1}{\beta^2+(1-\beta)^2}\left(\frac{2\pi}{d}\right)^{\frac{d-1}{2}}}\left[1+a_2\left(\frac{d^2+2d+3}{8}-\frac{d+2}{2}+\frac{d-1}{2}\frac{(1-\beta)^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}+\frac{\beta^4+(1-\beta)^4}{[\beta^2+(1-\beta)^2]^2}\right)\right]$$

$$= \frac{S_d}{\alpha^2}\left(\frac{d}{2\pi}\right)^{d/2}\cdot\sqrt{\frac{d}{2\pi}}\,\frac{1}{d}\,\frac{1}{\beta^2+(1-\beta)^2}\left[1+a_2\left(\frac{d^2+2d+3}{8}-\frac{d+2}{2}+\frac{d-1}{2}\frac{(1-\beta)^2}{\beta^2+(1-\beta)^2}+\frac{\beta^4+(1-\beta)^4}{[\beta^2+(1-\beta)^2]^2}\right)\right]$$

Avec:

$$\beta=\frac{1+\alpha}{2\alpha}\ ;\ 1-\beta=\frac{\alpha-1}{2\alpha}\ ;\ \beta^2+(1-\beta)^2 = \frac{1}{(2\alpha)^2}\left((1+\alpha)^2+(\alpha-1)^2\right) = \frac{1}{(2\alpha)^2}\left[2\alpha^2+2\right] = \frac{\alpha^2+1}{2\alpha^2}$$

$$\beta^4+(1-\beta)^4 = \frac{1}{(2\alpha)^4}\left[(1+\alpha)^4+(\alpha-1)^4\right] = \frac{1}{(2\alpha)^4}\left[2+12\alpha^2+2\alpha^4\right] = \frac{\alpha^4+6\alpha^2+1}{8\alpha^4}$$

$$\frac{(1-\beta)^2}{\beta^2+(1-\beta)^2} = \frac{(\alpha-1)^2}{(2\alpha)^2}\,\frac{1}{\frac{(1+\alpha)^2}{(2\alpha)^2}+\frac{(\alpha-1)^2}{(2\alpha)^2}} = \frac{(\alpha-1)^2}{(1+\alpha)^2+(\alpha-1)^2} = \frac{(\alpha-1)^2}{1+\alpha^2+\cancel{2\alpha}+\alpha^2+1-\cancel{2\alpha}} = \frac{1}{2}\,\frac{(\alpha-1)^2}{1+\alpha^2}$$

$$\frac{\beta^4+(1-\beta)^4}{[\beta^2+(1-\beta)^2]^2} = \frac{\alpha^4+6\alpha^2+1}{8\alpha^4}\cdot\frac{4\alpha^4}{(\alpha^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha^4+6\alpha^2+1}{(\alpha^2+1)^2}$$

$$\Longrightarrow \tilde{I}_g = \frac{S_d}{\cancel{\alpha^2}}\overbrace{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^{d/2}}^{=\mathcal{M}(0)}\frac{1}{\sqrt{2\pi d}}\,\frac{2\cancel{\alpha^2}}{1+\alpha^2}\left[1+a_2\left(\frac{d^2+2d+3}{8}-\frac{4(d+2)}{8}+\frac{d-1}{4}\frac{(\alpha-1)^2}{1+\alpha^2}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^4+6\alpha^2+1}{(\alpha^2+1)^2}\right)\right]$$

$$= S_d\,\mathcal{M}(0)\sqrt{\frac{2}{\pi d}}\,\frac{1}{1+\alpha^2}\left[1+a_2\left(\frac{d^2+2d-4d+3-8}{8}+\frac{2(d-1)}{8}\frac{(\alpha-1)^2}{1+\alpha^2}+\frac{4}{8}\frac{\alpha^4+6\alpha^2+1}{(\alpha^2+1)^2}\right)\right]$$

$$\tilde{I}_g = \frac{S_d\,\mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}}\cdot 2\sqrt{\frac{2}{d}}\,\frac{1}{(1+\alpha^2)^3}\left[(1+\alpha^2)^2+a_2\frac{1}{8}\left((1+\alpha^2)^2(d^2-2d-5)+2(d-1)(\alpha-1)^2(1+\alpha^2)+4(\alpha^4+6\alpha^2+1)\right)\right]$$

Vérifications: ce terme est le même que celui du calcul de Emmanuel (reformuler, et le $\sqrt{2/d}$ supplementaire ici provient de la normalisation. Il s'ajoute à un autre terme similaire du membre de gauche. A venir.). On met les termes de gains et de perte ensembles:

perte:

$$\tilde{I}=\tilde{I}_p+\tilde{I}_g = -\frac{S_d\,\mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{d}}\underbrace{\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\left(1-\frac{a_2}{8}\right)}_{=1+\frac{a_2}{8}\left(d(d+2)-1\right)+O(a_2^2)} + \frac{S_d\,\mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}}\,2\sqrt{\frac{2}{d}}\,\frac{1}{(1+\alpha^2)^3}\left[(1+\alpha^2)^2+\frac{a_2}{8}\left\{(1+\alpha^2)^2(d^2-2d-5)+2(d-1)(\alpha-1)^2(1+\alpha^2)+4(\alpha^4+6\alpha^2+1)\right\}\right]$$

$$\boxed{\lim_{c_1\to 0}\tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f}) = \frac{S_d\,\mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{d}}\left[\frac{2}{1+\alpha^2}-1+\frac{a_2}{8(1+\alpha^2)^3}\left\{2(1+\alpha^2)^2(d^2-2d-5)+4(d-1)(\alpha-1)^2(1+\alpha^2)+8(\alpha^4+6\alpha^2+1)-(1+\alpha^2)^3(d^2+2d-1)\right\}\right]}$$

vient de $\tilde{I}_p$

Résolution de l'équation dans le cas de l'annihilation pure: $\boxed{\text{FREE COOLING}}$

Dans ce cas dans la littérature l'équation pour l'annihilation pure est donnée par (cf. Noije)

$$\frac{\mu_2}{d}\left(d+c_1\frac{d}{dc_1}\right)\tilde{f}(c_1) = \tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f}) \qquad ;\ \mu_p = -\int dc_1\,c_1^p\,\tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f})$$

Dans la limite de faible dissipation, cette équation a une solution qui approche la maxwellienne $\tilde{f}_N(c)=\pi^{-d/2}e^{-c^2}$. A noter la normalisation qui est différente de celle que j'ai utilisé. Cette équation doit donc être corrigée pour tenir compte de ma normalisation: on a:

$$\mu_p^{\text{Noije}} = -\int dc_1\,c_1^p\int dc_2\int d\hat{\sigma}\,\Theta(\hat{\sigma}\cdot c_{12})(\hat{\sigma}\cdot c_{12})\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde{f}_N(c_1^{**})\tilde{f}_N(c_2^{**})-\tilde{f}_N(c_1)\tilde{f}_N(c_2)\right] \qquad ;\ c_i=\sqrt{d/2}\,y_i\ ;\ dc_i=(d/2)^{d/2}dy_i$$

$$= -\int dy_1\,\underbrace{(d/2)^{d/2}}(d/2)^{p/2}y_1^p\int dy_2\,\underbrace{\left(\frac{d}{2}\right)^{d/2}}\int d\hat{\sigma}\,\Theta(\hat{\sigma}\cdot y_{12})(\hat{\sigma}\cdot y_{12})\sqrt{d/2}\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde{f}_N(\sqrt{d/2}\,y_1^{**})\tilde{f}_N(\sqrt{d/2}\,y_2^{**})-\tilde{f}_N(\sqrt{d/2}\,y_1)\tilde{f}_N(\sqrt{d/2}\,y_2)\right]$$

$$= -(d/2)^{\frac{p+1}{2}}\int dy_1\,y_1^p\int dy_2\int d\hat{\sigma}\,\Theta(\hat{\sigma}\cdot y_{12})(\hat{\sigma}\cdot y_{12})\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde{f}(y_1^{**})\tilde{f}(y_2^{**})-\tilde{f}(y_1)\tilde{f}(y_2)\right]$$

$$= +(d/2)^{\frac{p+1}{2}}\mu_p^{\text{Injoi}}$$

Et aussi:

$$\tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f}) = \int dc_2\int d\hat{\sigma}\,\Theta(\hat{\sigma}\cdot c_{12})(\hat{\sigma}\cdot c_{12})\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde{f}_N(c_1^{**})\tilde{f}_N(c_2^{**})-\tilde{f}_N(c_1)\tilde{f}_N(c_2)\right] \qquad ;\ c_2=\sqrt{d/2}\,y_2$$

$$= \int dy_2\,\underbrace{\left(\frac{d}{2}\right)^{d/2}}\int d\hat{\sigma}\,\Theta(\hat{\sigma}\cdot c_{12})(\hat{\sigma}\cdot c_{12})\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde{f}_N(c_1^{**})\tilde{f}_N(c_2^{**})-\tilde{f}_N(c_1)\tilde{f}_N(c_2)\right]\cdot\underbrace{\left(\frac{d}{2}\right)^{d/2}}\left(\frac{2}{d}\right)^{d/2}$$

et comme le terme $c_1\frac{d}{dc_1}$ du membre de gauche de l'équation est invariant sous le changement de variables $c_1=\sqrt{d/2}\,y_1$, alors on effectue aussi la substitution $c_1=\sqrt{d/2}\,y_1 \Longrightarrow$

$$\tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f}) = \left(\frac{2}{d}\right)^{d/2}\int dy_2\int d\hat{\sigma}\,\Theta(\hat{\sigma}\cdot c_{12})(\hat{\sigma}\cdot y_{12})\sqrt{\frac{d}{2}}\left[\frac{1}{\alpha^2}\tilde{f}(y_1^{**})\tilde{f}(y_2^{**})-\tilde{f}(y_1)\tilde{f}(y_2)\right]$$

$$= \left(\frac{2}{d}\right)^{d/2}\sqrt{\frac{d}{2}}\;\tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f})^{\text{moi}}$$

L'équation devient :

$$\left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{p+1}{2}} \frac{\mu_2^{\text{Trijac}}}{d}\left(d + c_1 \frac{d}{dc_1}\right) \tilde{f}_N(c_1) = \left(\frac{2}{d}\right)^{d/2} \sqrt{\frac{d}{2}}\, \tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f})^{\text{moi}} \qquad ; p=2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left(\frac{d}{2}\right)^{3/2} \frac{\mu_2^{\text{Trijac}}}{d}\left(d + c_1\frac{d}{dc_1}\right)\tilde{f}(c_1) = \tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f})} \qquad , \tilde{f}(c) = \underbrace{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^{d/2} e^{-d/2\, c^2}}_{=\mathcal{M}(c)}\left[1 + a_2 S_2(c^2) + \dots\right] \quad ; \mu_2^{\text{Noije}} = \frac{S_d}{2\sqrt{\pi}} \frac{1-\alpha^2}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{3}{16}a_2\right)$$

L'équation n'est donc pas invariante ! Dans la limite $c_1 \to 0$ on a :

$$\left(\frac{d}{2}\right)^{3/2} \mu_2^{\text{Trij.}} \tilde{f}(0) = \tilde{I}^{\text{moi}}$$

$$\Longrightarrow (d/2)^{3/2}(d/2)^{-1/2} \mu_2^{\text{Noije}} \mathcal{M}(0)\left[1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right] = \frac{S_d \mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2}{d}}\left[\dots\right]$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\frac{2}{d}}\, \frac{S_d \mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}} \frac{1-\alpha^2}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{3}{16}a_2\right]\left[1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right] = \frac{S_d \mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{d}}\left[\dots\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{1-\alpha^2}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{3}{16}a_2\right)\left(1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right) = \frac{2}{1+\alpha^2} - 1 + \frac{a_2}{8(1+\alpha^2)^3}\left\{2(1+\alpha^2)^2(d^2-2d-5) + 4(d-1)(\alpha-1)^2(\alpha^2+1) + 8(\alpha^4+6\alpha^2+1) - (1+\alpha^2)^3(d^2+2d-1)\right\}$$

Ce qui est bien la même équation que celle découlant des notes de Emmanuel. A nouveau, on a l'arbitraire des différents choix du D.L. de Taylor des grandeurs $a = bc$; $b = 1 + \frac{3}{16}a_2$; $c = 1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}$; $a = \frac{\sqrt{2}}{1-\alpha^2}\left[\frac{2}{1+\alpha^2} - 1\right] + a_2 \frac{\sqrt{2}}{1-\alpha^2}\frac{1}{8(1+\alpha^2)^3}\left\{\dots\right\} = D_1 + a_2 D_2$. On a 8 possibilités, mais celle qui donne le résultat le plus proche des simulations numériques est $a = b.c$. Ce a_2 est donné par :

$$a_2 = \frac{16(\sqrt{2}-1-\sqrt{2}\alpha^2+\alpha^4)(1+\alpha^2)^2}{2\sqrt{2}\left[5+8\alpha(d-1)+8\alpha^3(d-1)+2d-d^2-\alpha^2(23-6d+d^2)+\alpha^6(-1+2d+d^2)+\alpha^4(3+6d+d^2)\right] - (1+\alpha^2)^4(3+4d+2d^2)}$$

cf. le a_2 de l'article.

"Ambiguïtés" du free cooling :
1) $a = bc$
2) $\frac{1}{a} = \frac{1}{bc}$
3) $\frac{a}{b} = c$
4) $\frac{b}{a} = \frac{1}{c}$
5) $\frac{a}{c} = b$
6) $\frac{c}{a} = \frac{1}{b}$
7) $\frac{a}{bc} = 1$
8) $\frac{bc}{a} = 1$

1) $a = bc \Rightarrow$ ce qui est déjà calculé : $D_1 + a_2 D_2 = 1 + a_2\left(\frac{3}{16} + \frac{d(d+2)}{8}\right)$

2) $\frac{1}{a} = \frac{1}{bc} \Rightarrow \frac{1}{D_1 + a_2 D_2} = \frac{1}{1 + a_2\left(\frac{3}{16} + \frac{d(d+2)}{8}\right)} \Longrightarrow \frac{1}{D_1}\left(1 - a_2\frac{D_2}{D_1}\right) = 1 - \left(\frac{3}{16} + \frac{d(d+2)}{8}\right)a_2$

3) $\frac{a}{b} = c \Rightarrow \frac{D_1 + a_2 D_2}{1 + \frac{3}{16}a_2} = 1 + a_2\frac{d(d+2)}{8} \Longrightarrow (D_1 + a_2 D_2)\left(1 - \frac{3}{16}a_2\right) = 1 + a_2\frac{d(d+2)}{8} \Longrightarrow D_1 + a_2\left[D_2 - \frac{3}{16}D_1\right] = 1 - a_2\frac{d(d+2)}{8}$

4) $\frac{b}{a} = \frac{1}{c} \Rightarrow \left(1 + \frac{3}{16}a_2\right)\left(1 - a_2\frac{D_2}{D_1}\right)\frac{1}{D_1} = 1 - a_2\frac{d(d+2)}{8} \Longrightarrow \frac{1}{D_1}\left(1 - a_2\frac{D_2}{D_1} + \frac{3}{16}a_2\right) = 1 - a_2\frac{d(d+2)}{8}$

5) $\frac{a}{c} = b \Rightarrow (D_1 + a_2 D_2) = \left(1 - a_2\frac{d(d+2)}{8}\right) = 1 + \frac{3}{16}a_2 \Longrightarrow D_1 + a_2\left[D_2 - \frac{d(d+2)}{8}D_1\right] = 1 + \frac{3}{16}a_2$

6) $\frac{c}{a} = \frac{1}{b} \Rightarrow \left(1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\left(1 - a_2\frac{D_2}{D_1}\right)\frac{1}{D_1} = 1 - \frac{3}{16}a_2 \Longrightarrow \frac{1}{D_1}\left(1 - a_2\frac{D_2}{D_1} + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right) = 1 - 3/16\, a_2$

7) $\frac{a}{bc} = 1 \Rightarrow (D_1 + a_2 D_2)\frac{1}{1 + a_2\left(\frac{3}{16} + \frac{d(d+2)}{8}\right)} = 1 \Longrightarrow (D_1 + a_2 D_2)\left(1 - a_2\left(3/16 + \frac{d(d+2)}{8}\right)\right) = 1 \Longrightarrow D_1 + a_2\left[D_2 - \left(\frac{3}{16} + \frac{d(d+2)}{8}\right)D_1\right] = 1$

8) $\frac{bc}{a} = 1 \Rightarrow \left(1 + 3/16\, a_2\right)\left(1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\left(1 - a_2\frac{D_2}{D_1}\right)\frac{1}{D_1} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{D_1}\left(1 - a_2\frac{D_2}{D_1}\right)\left(1 + a_2\frac{d(d+2)}{8} + \frac{3}{16}a_2\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{D_1}\left[1 + a_2\frac{d(d+2)}{8} + \frac{3}{16}a_2 - a_2\frac{D_2}{D_1}\right] = 1$ cf. Mathematica

HEATED cas chauffé : équation (29) dans Noije : [thermostat stochastique car $\exists$ opérateur de diffusion $\nabla_{c_1}^2$]

$$-\frac{\mu_2}{2d}\nabla_{c_1}^2 \tilde{f}(c_1) = \tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f})$$

Comment se transforme cette équation dans mes notations ?

$$\mu_2 = (d/2)^{3/2}\mu_2^{\text{Trijac}} \quad , \tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f}) = \left(\frac{2}{d}\right)^{d/2}\sqrt{\frac{d}{2}}\,\tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f})^{\text{moi}} \quad ; \nabla_{c_1}^2 = \frac{2}{d}\nabla_{Y_1}^2 \quad ;$$

$$\Longrightarrow -\left(\frac{d}{2}\right)^{3/2}\frac{\mu_2^{\text{Trijac}}}{2d}\,\frac{2}{d}\nabla_{c_1}^2 \tilde{f}_N(c_1) = \left(\frac{2}{d}\right)^{d/2}\sqrt{\frac{d}{2}}\,\tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f})^{\text{moi}}$$

$$\Longrightarrow -\frac{\mu_2^{\text{Trijac}}}{2d}\nabla_{c_1}^2 \tilde{f}(c_1) = \tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f})^{\text{moi}}$$

Cette équation est invariante ! Pour la limite $c_1 \to 0$ on a : utilisant la symétrie sphérique et donc $\nabla_{c_1}^2 \tilde{f}(c_1) = \frac{1}{c_1^{d-1}}\frac{\partial^2}{\partial c_1^2}\left(c_1^{d-1}\tilde{f}(c_1)\right) = \frac{\partial^2}{\partial c_1^2}\tilde{f}(c_1) + \frac{d-1}{c_1}\frac{\partial \tilde{f}(c_1)}{\partial c_1}$

$$\nabla_{c_1}^2 \tilde{f}(c_1) = \frac{\partial^2}{\partial c_1^2}\mathcal{M}(c_1)\left[1 + a_2 S_2(c_1^2)\right] + \frac{d-1}{c_1}\frac{\partial}{\partial c_1}\mathcal{M}(c_1)\left[1 + a_2 S_2(c_1^2)\right]$$

$$= \frac{d-1}{c_1}\mathcal{M}'(c_1)\left[1 + a_2 S_2(c_1^2)\right] + \frac{d-1}{c_1}\mathcal{M}(c_1) a_2 S_2'(c_1^2) + \mathcal{M}''(c_1)\left[1 + a_2 S_2(c_1^2)\right] + \mathcal{M}'(c_1) a_2 S_2'(c_1^2)\cdot 2 + \mathcal{M}(c_1) a_2 S_2''(c_1^2)$$

$$S_2'(c^2) = \frac{\partial}{\partial c}\left[Ac^4 + Bc^2 + C\right] = 3Ac^3 + 2Bc \xrightarrow{c\to 0} 0 \qquad ; A = \frac{d^2}{8} ; B = -\frac{d(d+2)}{4} ; C = \frac{d(d+2)}{8}$$

$$D = d/2$$

$$S_2''(c^2) = 9Ac^2 + 2B \xrightarrow{c\to 0} 2B$$

$$\mathcal{M}'(c) = -D\,2c\,\mathcal{M}(c) = -c2D\mathcal{M}(c) \xrightarrow{c\to 0} 0$$

$$\mathcal{M}''(c) = -c2D(-c2D\mathcal{M}(c)) - 2D\mathcal{M}(c) = -2D\mathcal{M}(c) + 4D^2c^2\mathcal{M}(c) \xrightarrow{c\to 0} -2D\mathcal{M}(0)$$

$$\xrightarrow{c_1\to 0} -\frac{\mu_2^{\text{Trijac}}}{2d}\left[(d-1)\left[1 + a_2 S_2(0)\right](-1)\frac{c_1}{c_1}2D\mathcal{M}(0) + (d-1)\mathcal{M}(0) a_2 2B - 2D\mathcal{M}(0)\left[1 + a_2 S_2(0)\right] + 0 + \mathcal{M}(0) a_2 2B\right] = \tilde{I}^{\text{moi}}$$

$$\Longrightarrow -\frac{\mu_2^{\text{Trijac}}}{2d}\left[\left\{1 + a_2 S_2(0)\right\}\left\{-(d-1)2D\mathcal{M}(0) - 2D\mathcal{M}(0)\right\} + \mathcal{M}(0) a_2 2B(d \cancel{-1} \cancel{+1})\right] = \tilde{I}^{\text{moi}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mu_2^{\text{Trijac}}}{2\cancel{d}}\left[\left\{1 + a_2 C\right\} 2\cancel{d}D\mathcal{M}(0) - \cancel{d}\mathcal{M}(0) 2B a_2\right] = \tilde{I}^{\text{moi}}$$

$$\Longrightarrow \mu_2^{\text{Trijac}}\mathcal{M}(0)\frac{1}{2}\left[2D + a_2\left(2DC - 2B\right)\right] = \tilde{I}^{\text{moi}}$$

A titre de vérification, dans le cas de Emmanuel avec $D = 1$, $C = \frac{d(d+2)}{8}$, $B = -\frac{d+2}{2}$ on trouve $\mu_2^{\text{Noije}}\phi(0)\frac{1}{2}\left[2 + a_2\frac{(d+2)(d+4)}{4}\right]$, ce qui est bien son résultat. Ainsi dans mon cas :

$$\mu_2^{\text{Trijac}}\mathcal{M}(0)\frac{1}{2}\left[d + a_2\frac{d(d+2)(d+4)}{8}\right] = \tilde{I}^{\text{moi}}$$

$$\Longrightarrow \mu_2^{\text{Trijac}}\mathcal{M}(0)\frac{1}{2}\left[2 + a_2\frac{(d+2)(d+4)}{4}\right]\frac{d}{2} = \tilde{I}^{\text{moi}}$$

et on voit qu'il y a juste le facteur $d/2$ multiplicatif devant la même expression que celle d'Emmanuel. On voit à nouveau que le jeu des puissances va redonner la même équation finale :

$$\cancel{\left(\frac{2}{d}\right)^{3/2}} M_2^{Noije} \mathcal{M}(0) \frac{1}{2}\left[2+a_2\frac{(d+2)(d+4)}{4}\right]\cancel{\frac{d}{2}} = \frac{S_d \mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}}\cancel{\sqrt{\frac{2}{d}}}\left[\dots\right] \quad ; \quad M_2^{Noije} = \frac{S_d}{2\sqrt{\pi}}\frac{1-\alpha^2}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{3}{16}a_2\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{S_d \mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}}}\frac{1-\alpha^2}{\sqrt{2}}\left[1+a_2\frac{(d+2)(d+4)}{8}\right]\left[1+\frac{3}{16}a_2\right] = \cancel{\frac{S_d \mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}}}\left[\dots\right]$$

$$\Rightarrow \left(1+a_2\frac{(d+2)(d+4)}{8}\right)\left(1+\frac{3}{16}a_2\right) = \frac{\sqrt{2}}{1-\alpha^2}\left(\frac{2}{1+\alpha^2}-1\right) + a_2\frac{\sqrt{2}}{1-\alpha^2}\frac{1}{8(1+\alpha^2)^3}\left\{2(1+\alpha^2)^2(d^2-2d-5)+4(d-1)(\alpha-1)^2(1+\alpha^2)+8(\alpha^4+6\alpha^2+1)-(1+\alpha^2)^3(d^2+2d-1)\right\}$$

Soit $b = 1+\frac{3}{16}a_2$; $c = 1+a_2\frac{(d+2)(d+4)}{8}$; $a = \frac{\sqrt{2}}{1-\alpha^2}\left(\frac{2}{1+\alpha^2}-1\right)+a_2\frac{\sqrt{2}}{1-\alpha^2}\frac{1}{8(1+\alpha^2)^3}\{\dots\} = D_1+a_2D_2$, alors à nouveau on a 8 possibilités d'ambiguïtés pour le D.L. de Taylor. Soit $b=b_1+a_2b_2$; $c=c_1+a_2c_2$, alors :

1) $a=bc$ 5) $\frac{a}{c}=b$
2) $\frac{1}{a}=\frac{1}{bc}$ 6) $\frac{c}{a}=\frac{1}{b}$
3) $\frac{a}{b}=c$ 7) $\frac{a}{bc}=1$
4) $\frac{b}{a}=\frac{1}{c}$ 8) $\frac{bc}{a}=1$

1) $a=bc \Rightarrow (b_1+a_2b_2)(c_1+a_2c_2) = D_1+a_2D_2 \Rightarrow b_1c_1+b_1a_2c_2+a_2b_2c_1 = D_1+a_2D_2 \Rightarrow b_1c_1+a_2(b_1c_2+b_2c_1) = D_1+a_2D_2$

2) $\frac{1}{a}=\frac{1}{bc} \Rightarrow \frac{1}{D_1+a_2D_2} = \frac{1}{b_1c_1+a_2(b_1c_2+b_2c_1)} \Rightarrow \frac{1}{D_1}\left(1-a_2\frac{D_2}{D_1}\right) = \frac{1}{b_1c_1}\left(1-a_2\frac{b_1c_2+b_2c_1}{b_1c_1}\right)$

3) $\frac{a}{b}=c \Rightarrow (D_1+a_2D_2)\frac{1}{b_1}\left(1-a_2\frac{b_2}{b_1}\right) = c_1+a_2c_2 \Rightarrow \frac{1}{b_1}\left(D_1-a_2\frac{b_2}{b_1}D_1+a_2D_2\right) = c_1+a_2c_2 \Rightarrow \frac{1}{b_1}\left(D_1+a_2\left(D_2-D_1\frac{b_2}{b_1}\right)\right) = c_1+a_2c_2$

4) $\frac{b}{a}=\frac{1}{c} \Rightarrow (b_1+a_2b_2)\frac{1}{D_1}\left(1-a_2\frac{D_2}{D_1}\right) = \frac{1}{c_1}\left(1-a_2\frac{c_2}{c_1}\right) \Rightarrow \left(b_1-a_2b_1\frac{D_2}{D_1}+a_2b_2\right) = \frac{D_1}{c_1}\left(1-a_2\frac{c_2}{c_1}\right) \Rightarrow b_1+a_2\left(b_2-b_1\frac{D_2}{D_1}\right) = \frac{D_1}{c_1}\left(1-a_2\frac{c_2}{c_1}\right)$ $\otimes$

5) $\frac{a}{c}=b \Rightarrow (D_1+a_2D_2)\frac{1}{c_1}\left(1-a_2\frac{c_2}{c_1}\right) = b_1+a_2b_2 \Rightarrow \left(D_1-a_2D_1\frac{c_2}{c_1}+a_2D_2\right) = c_1(b_1+a_2b_2) \Rightarrow D_1+a_2\left(D_2-D_1\frac{c_2}{c_1}\right) = c_1(b_1+a_2b_2)$

6) $\frac{c}{a}=\frac{1}{b} \Rightarrow (c_1+a_2c_2)\frac{1}{D_1}\left(1-a_2\frac{D_2}{D_1}\right) = \frac{1}{b_1}\left(1-a_2\frac{b_2}{b_1}\right) \Rightarrow \left(c_1-a_2c_1\frac{D_2}{D_1}+a_2c_2\right) = \frac{D_1}{b_1}\left(1-a_2\frac{b_2}{b_1}\right) \Rightarrow c_1+a_2\left(c_2-c_1\frac{D_2}{D_1}\right) = \frac{D_1}{b_1}\left(1-a_2\frac{b_2}{b_1}\right)$

7) $\frac{a}{bc}=1 \Rightarrow (D_1+a_2D_2)\frac{1}{(b_1+a_2b_2)(c_1+a_2c_2)} = 1 \Rightarrow (D_1+a_2D_2)\frac{1}{b_1c_1+a_2(c_2b_1+b_2c_1)} = 1 \Rightarrow (D_1+a_2D_2)\frac{1}{b_1c_1}\left(1-a_2\frac{c_2b_1+c_1b_2}{b_1c_1}\right) = 1$

$$\Rightarrow D_1 - a_2D_1\frac{c_2b_1+c_1b_2}{b_1c_1} + a_2D_2 = b_1c_1$$

8) $\frac{bc}{a}=1 \Rightarrow (b_1+a_2b_2)(c_1+a_2c_2)\frac{1}{D_1}\left(1-a_2\frac{D_2}{D_1}\right) = 1 \Rightarrow \left(b_1c_1+a_2(b_1c_2+b_2c_1)\right)\left(1-a_2\frac{D_2}{D_1}\right) = D_1$

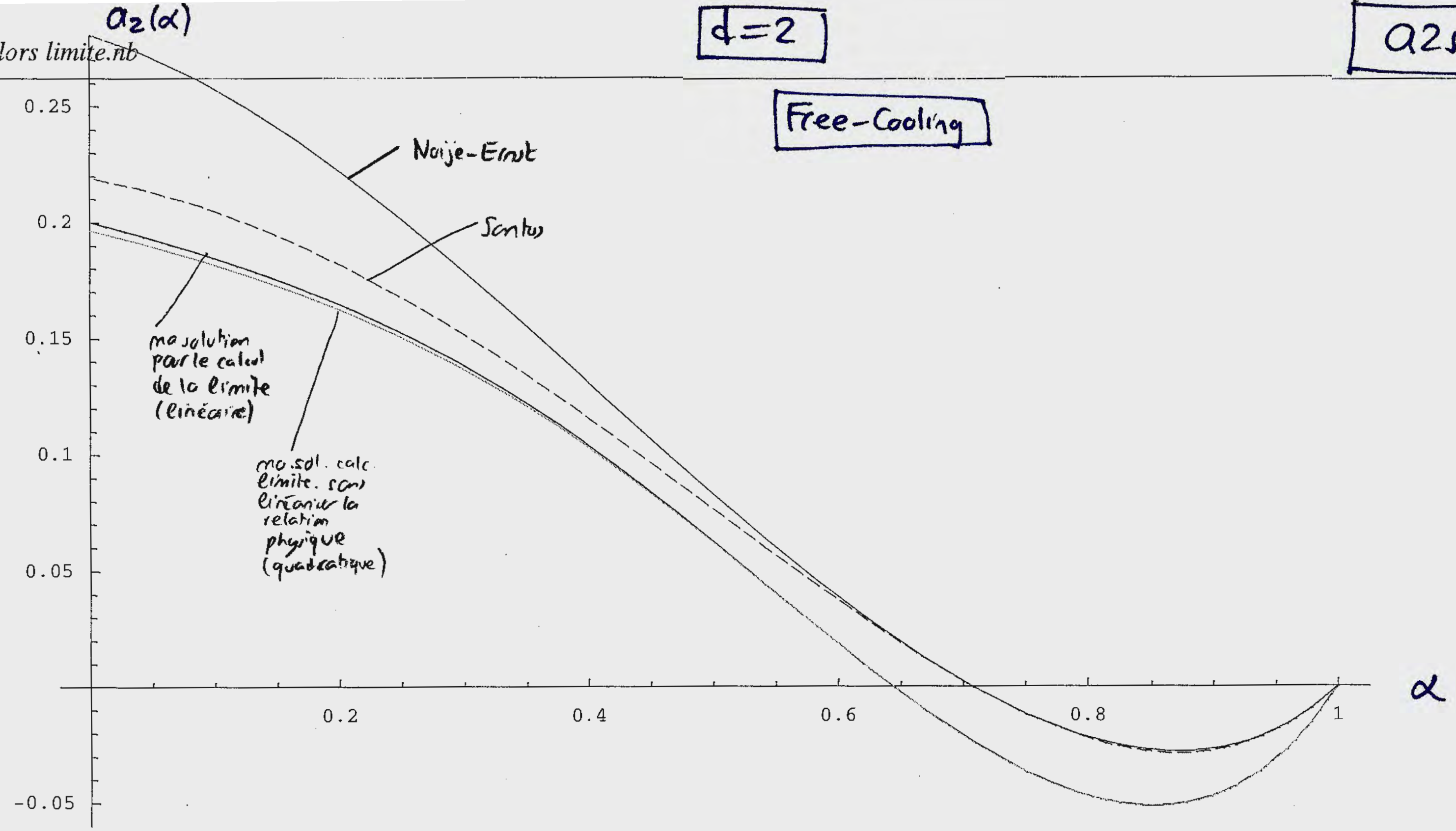
$$\Rightarrow b_1c_1 - a_2\frac{D_2}{D_1}b_1c_1 + a_2(b_1c_2+b_2c_1) = D_1$$

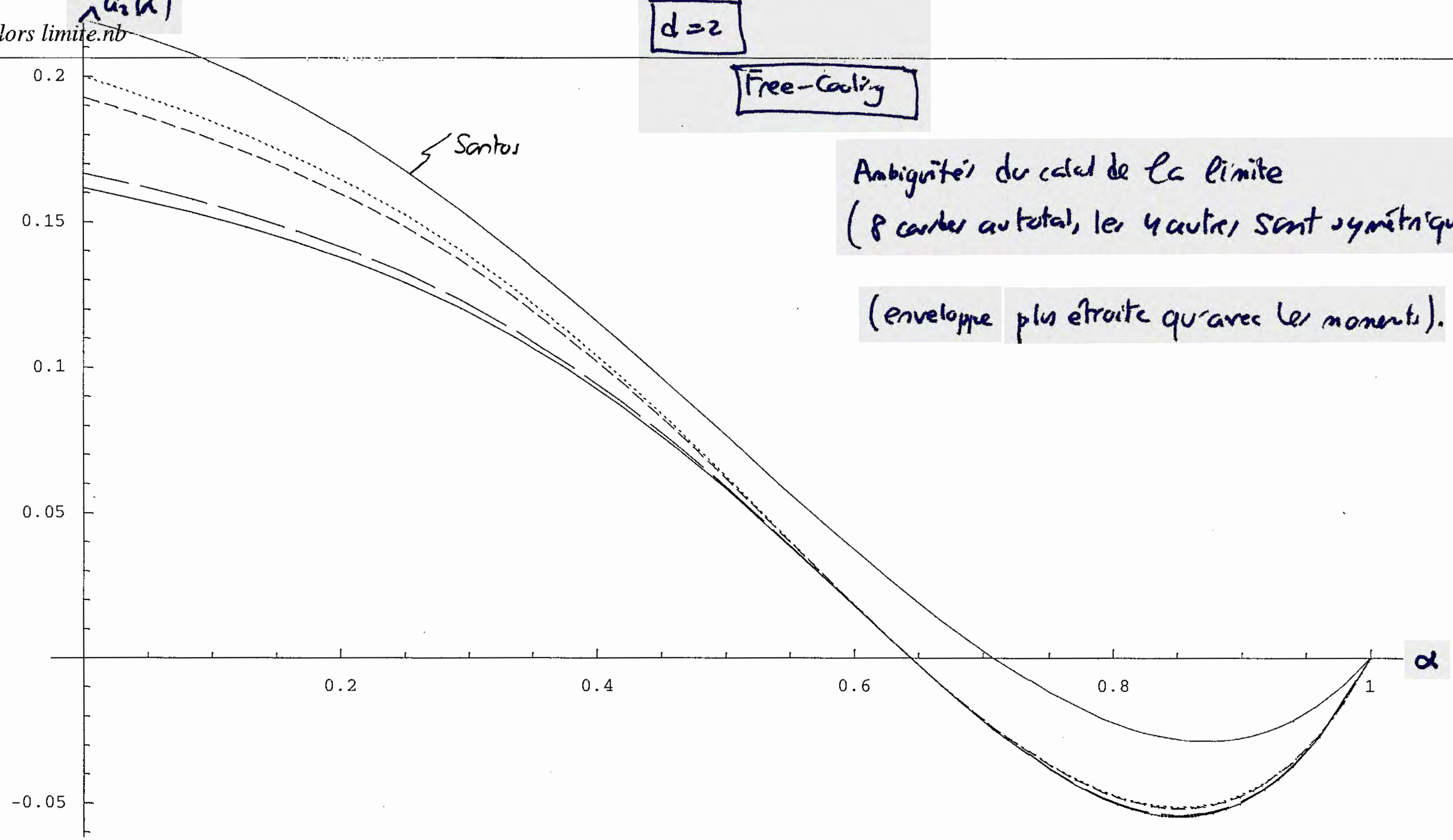
cf. Mathematica

Dans tous les cas on a une racine en $D_1-b_1c_1=0$, i.e. en $\alpha=\sqrt{\sqrt{2}-1}$ à nouveau.

Feuilles suivantes : étude des ambiguïtés des calculs de type Noije (sans limite $c_1 \to 0$).

a2s Taylors limite





d=2

Free-Cooling

Ambiguïtés du calcul de la limite
(8 cartes au total, les 4 autres sont symétriques à ces 4)

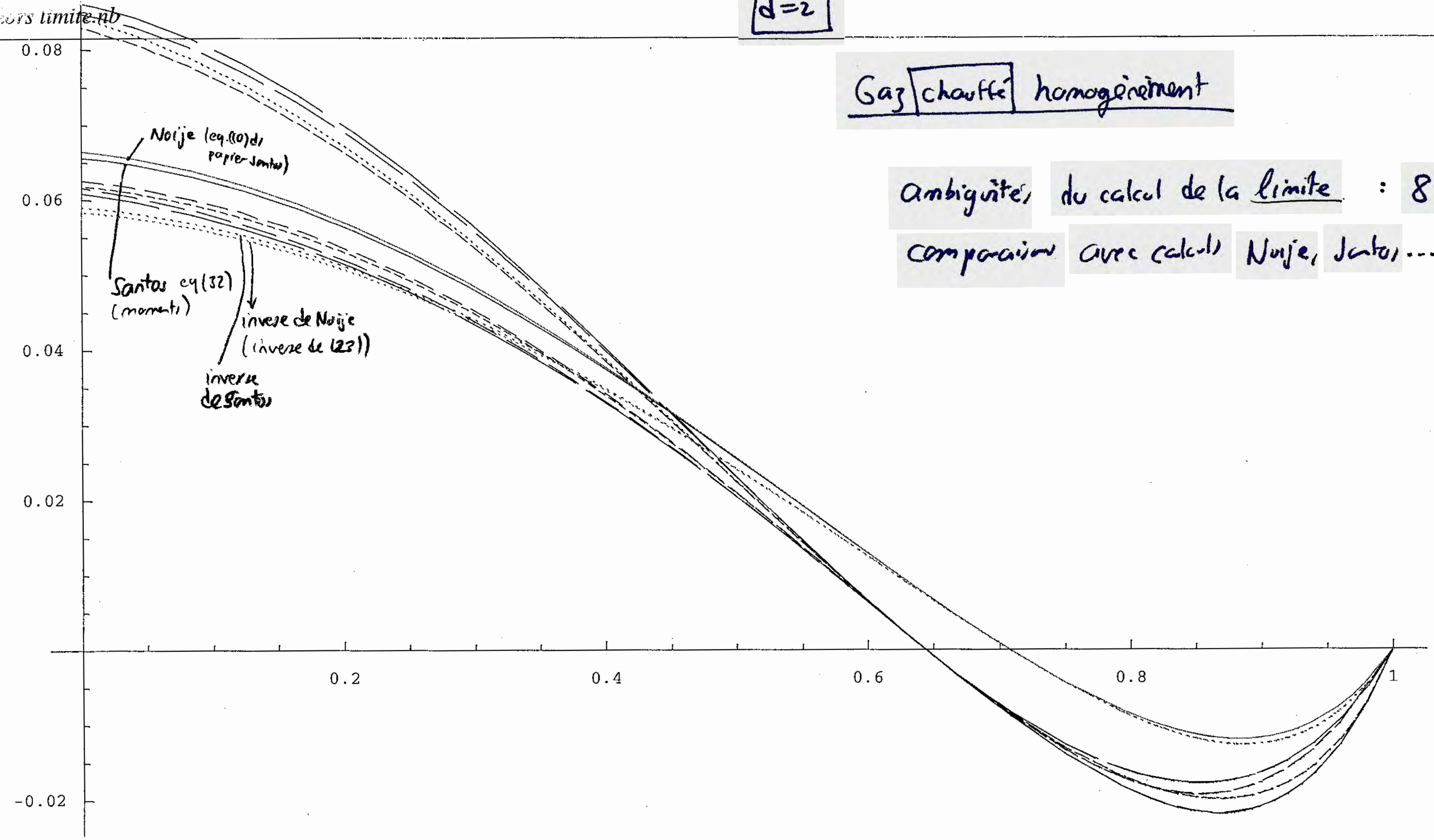
(enveloppe plus étroite qu'avec les moments).

$\boxed{d=2}$

Gaz $\boxed{\text{chauffé}}$ homogènement

ambiguïtés du calcul de la limite : 8 courbes

comparaison avec calculs Noije, Santos… : 4 courbes



Thermostat Gaussien : expression générale :

$$\boxed{\mu_p = \mu_2 \frac{p}{d} \langle c^p \rangle} \quad ; \; p = 4 \quad ; \quad a_2 = \frac{4}{d(d+2)} \langle c^4 \rangle - 1$$

~~Différentes approximations~~ :

$$\Rightarrow \frac{d(d+2)}{4} (a_2 + 1) = \langle c^4 \rangle$$

$$\cancel{\mu_4 = \mu_2 \frac{4}{d} \langle c^4 \rangle}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_4 = \mu_2 \frac{\cancel{4}}{\cancel{d}} \frac{\cancel{d}(d+2)}{\cancel{4}} (a_2 + 1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mu_4 = (d+2)(1+a_2)\, \mu_2}$$

Différentes approximations :

$a = b.c$: 4 manières d'arranger la chose.

$$\left[\begin{array}{ll} \text{v1)} & a = bc \\ \text{v2)} & \frac{1}{a} = \frac{1}{bc} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{v3)} & \frac{a}{b} = c \\ \text{v4)} & \frac{b}{a} = \frac{1}{c} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{v5)} & \frac{a}{c} = b \\ \text{v6)} & \frac{c}{a} = \frac{1}{b} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{v7)} & \frac{a}{bc} = 1 \\ \text{v8)} & \frac{bc}{a} = 1 \end{array}\right.$$

9)

$$\boxed{\begin{cases} a = \mu_4 \\ b = (d+2)(1+a_2) \\ c = \mu_2 \end{cases}}$$

$$\mu_p \simeq \mu_p^{(0)} + \mu_p^{(1)} a_2$$

$$\mu_2^{(0)} = \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\sqrt{2}\,\Gamma(d/2)} (1-\alpha^2)$$

$$\mu_2^{(1)} = \frac{3}{16} \mu_2^{(0)}$$

$$\mu_4^{(0)} = \left(d + \frac{3}{2} + \alpha^2\right) \mu_2^{(0)}$$

$$\mu_4^{(1)} = \left[\frac{3}{32}(10d + 39 + 10\alpha^2) + \frac{d-1}{1-\alpha}\right] \mu_2^{(0)}$$

1) $a = b.c \Rightarrow \mu_4 = (d+2)(1+a_2)\mu_2$

$$\Rightarrow \mu_4^{(0)} + a_2 \mu_4^{(1)} = (d+2)(1+a_2)\mu_2^{(0)} + (d+2) a_2 \mu_2^{(1)}$$

$$\Rightarrow \mu_4^{(0)} - (d+2)\mu_2^{(0)} = (d+2)\mu_2^{(0)} a_2 - a_2 \mu_4^{(1)} + (d+2) a_2 \mu_2^{(1)}$$

$$\Rightarrow a_2 \left((d+2)\mu_2^{(0)} - \mu_4^{(1)} + (d+2)\mu_2^{(1)} \right) = \mu_4^{(0)} - (d+2)\mu_2^{(0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 \simeq - \frac{\mu_4^{(0)} - (d+2)\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(1)} - (d+2)(\mu_2^{(0)} + \mu_2^{(1)})}} \quad \text{Noije-Ernst}$$

5) $\frac{a}{c} = b \Rightarrow \frac{\mu_4}{\mu_2} = (d+2)(1+a_2)$

$$\Rightarrow (\mu_4^{(0)} + a_2 \mu_4^{(1)}) . \underbrace{\frac{1}{\mu_2^{(0)} + \mu_2^{(1)} a_2}} = (d+2)(1+a_2) = d+2 + a_2(d+2)$$

$$= \frac{1}{\mu_2^{(0)}} \frac{1}{1 + \frac{\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)}} a_2} = \frac{1}{\mu_2^{(0)}} \left(1 - \frac{\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)}} a_2\right) = \frac{1}{\mu_2^{(0)}} - \frac{\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)2}} a_2$$

$$\Rightarrow (\mu_4^{(0)} + a_2 \mu_4^{(1)}) \left(\frac{1}{\mu_2^{(0)}} - \frac{\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)2}} a_2 \right) = d+2 + a_2(d+2)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_4^{(0)}}{\mu_2^{(0)}} - \frac{\mu_4^{(0)} \mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)2}} a_2 + \frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_2^{(0)}} a_2 = d+2 + a_2(d+2)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_4^{(0)}}{\mu_2^{(0)}} - (d+2) = a_2 \left[d+2 - \frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_2^{(0)}} + \frac{\mu_4^{(0)} \mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)2}} \right]$$

$$= \frac{\mu_4^{(0)} - \mu_2^{(0)}(d+2)}{\mu_2^{(0)}} = a_2 \frac{1}{\mu_2^{(0)}} \left[\mu_2^{(0)}(d+2) - \mu_4^{(1)} + \frac{\mu_4^{(0)} \mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)}} \right]$$

$$\Longrightarrow \quad a_2 = \frac{\mu_4^{(0)} - \mu_2^{(0)}(d+2)}{\cancel{\mu_2^{(0)}}} \; \frac{\cancel{\mu_2^{(0)}}}{\mu_2^{(0)}(d+2) - \mu_4^{(1)} + \frac{\mu_4^{(0)}\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)}}}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{\mu_4^{(0)} - \mu_2^{(0)}(d+2)}{\mu_2^{(0)}(d+2) + \frac{\mu_2^{(1)}\mu_4^{(0)}}{\mu_2^{(0)}} - \mu_4^{(1)}}}$$

Selon Santos, doit être proche de Vujic-Ernst 1)

3) $\frac{a}{b} = c \Longrightarrow \frac{\mu_4}{(d+2)(1+a_2)} = \mu_2$

$$\Longrightarrow \frac{\mu_4^{(0)} + a_2\mu_4^{(1)}}{1+a_2} = \mu_2(d+2)$$

$$\Longrightarrow \left(\mu_4^{(0)} + a_2\mu_4^{(1)}\right)(1-a_2) = \mu_2(d+2)$$

$$\Longrightarrow \mu_4^{(0)} + a_2\mu_4^{(1)} - a_2\mu_4^{(0)} = \mu_2(d+2)$$

$$\Longrightarrow a_2\left(\mu_4^{(1)} - \mu_4^{(0)}\right) = \mu_2(d+2) - \mu_4^{(0)}$$

$$\hookrightarrow = \mu_2^{(0)}(d+2) + \mu_2^{(1)}(d+2)\,a_2$$

$$\Longrightarrow a_2\left(\mu_4^{(1)} - \mu_4^{(0)} - \mu_2^{(1)}(d+2)\right) = \mu_2^{(0)}(d+2) - \mu_4^{(0)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{\mu_4^{(0)} - \mu_2^{(0)}(d+2)}{\mu_4^{(1)} - \mu_4^{(0)} - (d+2)\mu_2^{(1)}}}$$

Santos

2) $\frac{1}{a} = \frac{1}{bc} \Longrightarrow \frac{1}{\mu_4} = \frac{1}{(d+2)(1+a_2)\mu_2}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\mu_4^{(0)} + a_2\mu_4^{(1)}} = \frac{1}{(d+2)(1+a_2)\left(\mu_2^{(0)} + a_2\mu_2^{(1)}\right)}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\mu_4^{(0)}}\left(1 - \frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}a_2\right) = \frac{1}{d+2}\,\frac{1}{\underbrace{\mu_2^{(0)} + a_2\mu_2^{(1)} + a_2\mu_2^{(0)}}}$$

$$= \frac{1}{\mu_2^{(0)}}\,\frac{1}{1 + a_2\frac{\mu_2^{(1)} + \mu_2^{(0)}}{\mu_2^{(0)}}} = \frac{1}{\mu_2^{(0)}}\left[1 - a_2\left(\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)}} + 1\right)\right]$$

$$\Longrightarrow (d+2)\frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}\left(1 - \frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}a_2\right) = 1 - a_2\left(\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)}} + 1\right)$$

$$\Longrightarrow (d+2)\frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}} - (d+2)\frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}\frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}a_2 = 1 - a_2\left(\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)}} + 1\right)$$

$$\Longrightarrow a_2\left[\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)}} + 1 - (d+2)\frac{\mu_2^{(0)}\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)2}}\right] = 1 - (d+2)\frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_2 = \frac{\mu_4^{(0)} - (d+2)\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)} + \frac{\mu_2^{(1)}\mu_4^{(0)}}{\mu_2^{(0)}} - (d+2)\frac{\mu_2^{(0)}\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}}}$$

4) $\frac{b}{a} = \frac{1}{c} \implies (d+2)\,\frac{1+a_2}{\mu_4} = \frac{1}{\mu_2}$

$$\implies (d+2)(1+a_2)\,\frac{1}{\mu_4^{(0)}}\,\frac{1}{1+\frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}a_2} = \frac{1}{\mu_2^{(0)}}\,\frac{1}{1+\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)}}a_2}$$

$$\implies (d+2)(1+a_2)\,\frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}\left(1-\frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}a_2\right) = 1-\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)}}a_2$$

$$\implies (d+2)\,\frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}\Big[1-\underbrace{\frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}a_2 + a_2}_{a_2\left(1-\frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}\right)}\Big] = 1-\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)}}a_2$$

$$\implies (d+2)\,\frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}} + (d+2)\,\frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}\left(1-\frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}\right)a_2 = 1-\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)}}a_2$$

$$\implies a_2\left[(d+2)\,\frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}\left(1-\frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}\right)+\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)}}\right] = 1-(d+2)\,\frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}$$

$$\implies a_2 = \frac{1-(d+2)\frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}}{(d+2)\frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}\underbrace{\left(1-\frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}\right)}_{\frac{\mu_4^{(0)}-\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}}+\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)}}} \qquad \cdot\frac{\mu_4^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}$$

$$\implies \boxed{a_2 = \frac{\mu_4^{(0)}-(d+2)\mu_2^{(0)}}{(d+2)\frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}\left(\mu_4^{(0)}-\mu_4^{(1)}\right)+\frac{\mu_2^{(1)}\mu_4^{(0)}}{\mu_2^{(0)}}}}$$

6) $\frac{c}{a} = \frac{1}{b} \implies \frac{\mu_2}{\mu_4} = \frac{1}{d+2}\,\frac{1}{1+a_2}$

$$\implies \left(\mu_2^{(0)}+a_2\mu_2^{(1)}\right)\frac{1}{\mu_4^{(0)}}\,\underbrace{\frac{1}{1+\frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}a_2}}_{=1-\frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}a_2} = \frac{1}{d+2}(1-a_2)$$

$$\implies \frac{d+2}{\mu_4^{(0)}}\left(\mu_2^{(0)}+a_2\mu_2^{(1)}\right)\left(1-\frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}a_2\right) = 1-a_2$$

$$\implies \frac{d+2}{\mu_4^{(0)}}\left(\mu_2^{(0)}-\frac{\mu_4^{(1)}\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}a_2+a_2\mu_2^{(1)}\right) = 1-a_2$$

$$\implies \frac{d+2}{\mu_4^{(0)}}\mu_2^{(0)} + a_2\,\frac{d+2}{\mu_4^{(0)}}\left(\mu_2^{(1)}-\frac{\mu_4^{(1)}\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}\right) = 1-a_2$$

$$\implies a_2\left[\frac{d+2}{\mu_4^{(0)}}\left(\mu_2^{(1)}-\frac{\mu_4^{(1)}\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}\right)+1\right] = 1-(d+2)\,\frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}$$

$$\implies a_2\left[(d+2)\left(\mu_2^{(1)}-\frac{\mu_4^{(1)}\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}\right)+\mu_4^{(0)}\right] = \mu_4^{(0)}-(d+2)\mu_2^{(0)}$$

$$\implies \boxed{a_2 = \frac{\mu_4^{(0)}-(d+2)\mu_2^{(0)}}{(d+2)\left(\mu_2^{(1)}-\frac{\mu_4^{(1)}\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}\right)+\mu_4^{(0)}}}$$

7) $\frac{a}{bc} = 1 \implies \frac{\mu_4}{(d+2)(1+a_2)\mu_2} = 1$

$$\implies \left(\mu_4^{(0)} + a_2 \mu_4^{(1)}\right) \underbrace{\frac{1}{\left[\mu_2^{(0)} + \mu_2^{(1)} a_2\right]\left[1+a_2\right]}} = d+2$$

$$\frac{1}{\mu_2^{(0)} + \mu_2^{(1)} a_2 + \mu_2^{(0)} a_2} = \frac{1}{\mu_2^{(0)}} \frac{1}{1 + a_2 \frac{\mu_2^{(1)} + \mu_2^{(0)}}{\mu_2^{(0)}}}$$

$$= \frac{1}{\mu_2^{(0)}}\left[1 - \frac{\mu_2^{(1)} + \mu_2^{(0)}}{\mu_2^{(0)}} a_2\right]$$

$$\implies \left(\mu_4^{(0)} + a_2 \mu_4^{(1)}\right)\left(1 - \frac{\mu_2^{(1)} + \mu_2^{(0)}}{\mu_2^{(0)}} a_2\right) = (d+2)\mu_2^{(0)}$$

$$\implies \mu_4^{(0)} + a_2 \mu_4^{(1)} - \frac{\mu_4^{(0)}}{\mu_2^{(0)}}\left(\mu_2^{(1)} + \mu_2^{(0)}\right) a_2 = (d+2)\mu_2^{(0)}$$

$$\implies a_2\left[\mu_4^{(1)} - \frac{\mu_4^{(0)}}{\mu_2^{(0)}}\left(\mu_2^{(0)} + \mu_2^{(1)}\right)\right] = (d+2)\mu_2^{(0)} - \mu_4^{(0)}$$

$$\implies \boxed{a_2 = \frac{\mu_4^{(0)} - (d+2)\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)} + \frac{\mu_4^{(0)}\mu_2^{(1)}}{\mu_2^{(0)}} - \mu_4^{(1)}}}$$

8) $\frac{bc}{a} = 1 \implies (d+2)\frac{(1+a_2)\mu_2}{\mu_4} = 1$

$$\implies \underbrace{(1+a_2)\left(\mu_2^{(0)} + \mu_2^{(1)} a_2\right)}_{= \mu_2^{(0)} + \mu_2^{(1)} a_2 + \mu_2^{(0)} a_2} \frac{1}{\mu_4^{(0)}} \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}} a_2}}_{= 1 - \frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}} a_2} = \frac{1}{d+2}$$

$$\implies \frac{\mu_4^{(0)}}{d+2} = \left[\mu_2^{(0)} + a_2\left(\mu_2^{(1)} + \mu_2^{(0)}\right)\right]\left[1 - \frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}} a_2\right]$$

$$\implies \mu_2^{(0)} + a_2\left(\mu_2^{(1)} + \mu_2^{(0)}\right) - \frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}} \mu_2^{(0)} a_2 = \frac{\mu_4^{(0)}}{d+2}$$

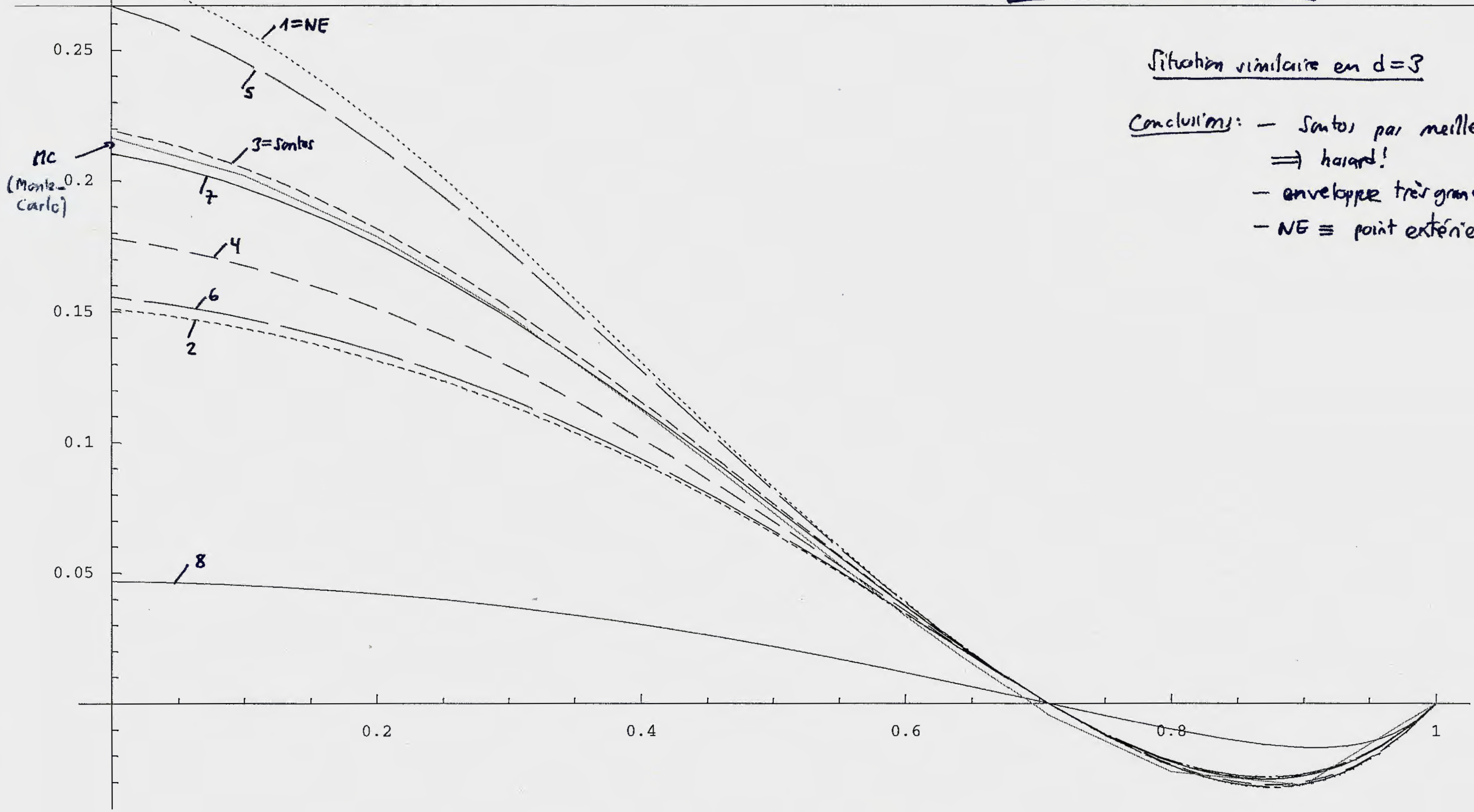
$$\implies a_2\left[\mu_2^{(1)} + \mu_2^{(0)} - \mu_4^{(1)} \frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_4^{(0)}}\right] = \frac{\mu_4^{(0)}}{d+2} - \mu_2^{(0)}$$

$$\implies \boxed{a_2 = \frac{\mu_4^{(0)} - (d+2)\mu_2^{(0)}}{(d+2)\left[\mu_2^{(1)} + \mu_2^{(0)} - \frac{\mu_4^{(1)}}{\mu_4^{(0)}}\mu_2^{(0)}\right]}}$$

+ calcul aussi réalisé pour un thermostat ~~??~~ déterministe
(cf. notes Mathematica : a2 Taylor limite.nb)

$\boxed{d=2}$

$\boxed{a2s \text{ Taylors moments}}$



Situation similaire en d=3

Conclusions : — Santos pas meilleur que courbe 7
⟹ hasard !
— enveloppe très grande...
— NE ≡ point extérieur de l'enveloppe !

$$\underbrace{\mu_4}_{a} = \underbrace{(d+2)(1+a_2)}_{b} \underbrace{\mu_2}_{c} \Rightarrow$$

1) $a = b\,c$
2) $\frac{1}{a} = \frac{1}{bc}$
3) $\frac{a}{b} = c$
4) $\frac{b}{a} = \frac{1}{c}$
5) $\frac{a}{c} = b$
6) $\frac{c}{a} = \frac{1}{b}$
7) $\frac{a}{bc} = 1$
8) $\frac{bc}{a} = 1$

Méthode de la limite pour l'annihilation probabiliste. Pourquoi faire ce calcul ? Pour avoir l'ordre zéro du développement de Chapman-Enskog de l'annihilation probabiliste pour le calcul des coefficients de transport. De la page 2 des notes :

$$\left[1+\frac{1-\alpha}{2}(d+c_1\nabla_{c_1})\right]\tilde f(c_1) = \tilde f(c_1)\frac{1}{\langle c_{12}\rangle}\int dc_2\,|c_{12}|\,\tilde f(c_2) - \frac{1-p}{p}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle}\frac{1}{\beta_1}\tilde I(\tilde f,\tilde f) \quad ;\ \beta_1=\frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\ ;\ \alpha=\frac{\langle c_{12}c_1^2\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^2\rangle}$$

On doit calculer la limite $c_1\to 0$ de cette chose, pour ensuite extraire $a_2(p)$ de l'annihilation probabiliste. La normalisation de $\tilde f$ ne joue pas de rôle finalement, comme pour le calcul précédent. Les grandeurs α, $\langle c_{12}\rangle$ sont des scalaires indép. de c_1, donc la limite ne les affecte pas. De plus, il y aura à nouveau de l'arbitraire selon où on met le $\langle c_{12}\rangle$ ou les autres termes. Ainsi la démarche est la suivante. On va essayer plusieurs façons de développer la chose, à l'ordre linéaire en a_2, puis calculer l'ordre quadratique a_2^2 pour voir lequel de ces développements linéaires est le plus proche de la solution supposée correcte dans le contexte de cette théorie (l'ordre quadratique). Commençons donc par l'ordre linéaire. On a :

$$\lim_{c_1\to 0}\tilde I(\tilde f,\tilde f)=\tilde I \quad : \text{déjà calculé}$$

$$\lim_{c_1\to 0}\frac{1-\alpha}{2}(d+c_1\nabla_{c_1})\tilde f(c_1)=\frac{1-\alpha}{2}d\,\tilde f(0) \quad ;\ \tilde f(0)=\mathcal M(0)(1+a_2S_2(0))=\mathcal M(0)\left[1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right]$$

$$\langle c_{12}\rangle=\left(1-\tfrac{1}{16}a_2\right)\langle c_{12}\rangle_0 \quad ;\ \langle c_{12}\rangle_0=\frac{2}{\sqrt d}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)$$

$$\alpha = 1+\frac{1}{2d}+a_2\frac{1}{8}(2+3/d)$$

$$\lim_{c_1\to 0}\tilde I(\tilde f,\tilde f)=\tilde I=\frac{S_d\mathcal M(0)}{2\sqrt\pi}\sqrt{\frac{2}{d}}\,[A+Ba_2] \quad ;\ \triangle\ \text{on veut des collisions élastiques } \alpha=1\ (\alpha\neq\text{le }\alpha\text{ ci-dessus, attention})$$

$$\lim_{\alpha\to1}A(\alpha)=\lim_{\alpha\to1}\frac{2}{1+\alpha^2}-1=0$$

$$\lim_{\alpha\to1}B(\alpha)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1}{8(1+\alpha^2)^3}\left[2(1+\alpha^2)^2(d^2-2d-5)+4(d-1)\overset{=0}{\cancel{(\alpha-1)^2}}(1+\alpha^2)+8(\alpha^4+6\alpha^2+1)-(1+\alpha^2)^3(d^2+2d-1)\right]$$

$$=\frac{1}{64}\cdot\left[2\cdot4(d^2-2d-5)+8(1+6+1)-8(d^2+2d-1)\right]$$

$$=1/8\left[\cancel{d^2}-2d-5-\cancel{d^2}-2d+1+8\right]$$

$$=1/2-d/2$$

$$\Longrightarrow \lim_{c_1\to0}\tilde I(\tilde f,\tilde f)=\frac{S_d\mathcal M(0)}{2\sqrt\pi}\sqrt{\frac{2}{d}}\,a_2\frac12(1-d) \quad ;\ S_d=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

$$\lim_{c_1\to0}\int dc_2\,|c_{12}|\,\tilde f(c_2)=\int dc_2\,|c_2|\,\tilde f(c_2)=\int dc_1\int dc_2\,|c_2|\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2)=\langle c_1\rangle=\left(1-\frac{a_2}{8}\right)\sqrt{\frac{2}{d}}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}$$

Met tout ensemble :

$$\langle c_{12}\rangle\left[1+\frac d2(1-\alpha)\right]\tilde f(0)=\tilde f(0)\langle c_1\rangle-\frac{1-p}{p}\frac{1}{\beta_1}\frac{S_d\mathcal M(0)}{2\sqrt\pi}\sqrt{\frac2d}\frac{1-d}{2}a_2$$

$$\Longrightarrow \left(1-\tfrac{1}{16}a_2\right)\underbrace{\frac{2}{\sqrt d}}_{=\sqrt2\,\cancel{\sqrt{2/d}}}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}\left[1+\frac d2-\frac d2\left\{1+\frac{1}{2d}+a_2\frac18(2+3/d)\right\}\right]\cancel{\mathcal M(0)}\left[1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right]=\cancel{\mathcal M(0)}\left[1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right]\left[1-\frac{a_2}{8}\right]\cancel{\sqrt{\tfrac2d}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}}-\frac{1-p}{p}\frac{2\pi^{d/2}}{\cancel{\Gamma(\frac d2)}}\cancel{\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}\frac{\cancel{\mathcal M(0)}}{2\sqrt\pi}\cancel{\sqrt{\tfrac2d}}\frac{1-d}{2}a_2$$

$$\Longrightarrow \sqrt2\left(1-\tfrac1{16}a_2\right)\left[1+\frac d2-\frac d2\left(1+\frac{1}{2d}\right)-\frac d2a_2\frac18(2+3/d)\right]\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)=\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\left(1-\frac{a_2}{8}\right)-\frac{1-p}{p}\frac{2\pi^{d/2}}{2\pi^{\frac{d-1}{2}+\frac12}}\frac{1-d}{2}a_2$$

$$\Longrightarrow \left(1-\tfrac1{16}a_2\right)\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\sqrt2\left(1+\cancel{\tfrac d2}-\cancel{\tfrac d2}-\frac14-a_2\frac1{16}(2d+3)\right)=\left(1-\frac{a_2}{8}\right)\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)-\frac{1-p}{p}\frac{1-d}{2}a_2$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\left(1-\tfrac1{16}a_2\right)}_{:=c_{12}}\underbrace{\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)}_{:=f_0}\underbrace{\frac{\sqrt2}{4}\left(3-a_2\frac14(3+2d)\right)}_{:=A}=\underbrace{\left(1-\frac{a_2}{8}\right)}_{:=B}\underbrace{\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)}_{=f_0}\underbrace{-\frac{1-p}{p}\frac{1-d}{2}a_2}_{:=I} \qquad (*)$$

On a donc l'équation $c_{12}Af_0=Bf_0+I$, et toutes les manières de réarranger ces termes engendre toutes les "ambiguïtés". Nous n'allons néanmoins étudier que quelques uns de ces cas. La méthode qui consiste à développer $c_{12}Af_0=Bf_0+I$ est la plus relevante du point de vue du sens physique (méthode dite "Naje"), tandis que on se souvient que Emmanuel avait pu simplifier par f_0, et de plus avait tout divisé par c_{12}, donc si on divise tout par f_0 et c_{12} j'appelle cette méthode "Tripac".

1) $c_{12}Af_0-Bf_0-I=0$: méthode "Naje"
2) $Af_0-Bf_0/c_{12}-I/c_{12}=0$: méthode Tripac 1/2
3) $c_{12}A-B-I/f_0=0$: méthode Naje + Tripac 1/2
4) $A-B/c_{12}-I/c_{12}f_0=0$: méthode Tripac 100% (on verra que cette méthode est très proche de l'ordre quadratique)

Commençons par 1) :

$$\underbrace{\left(1-\tfrac1{16}a_2\right)\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)}\frac{\sqrt2}{4}\left(3-a_2\frac14(3+2d)\right)=\underbrace{(1-a_2/8)\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)}-\frac{1-p}{p}\frac{1-d}{2}a_2$$

$$=1+a_2\frac{d(d+2)}{8}-a_2\frac1{16}+O(a_2^2) \qquad\qquad =1+a_2\frac{d(d+2)}{8}-a_2\frac18+O(a_2^2)$$

$$=\underbrace{1+a_2\frac{2d(d+2)-1}{16}} \qquad\qquad =\underbrace{1+a_2\frac{d(d+2)-1}{8}}$$

$$=\frac{\sqrt2}{4}\cdot\left(3-a_2\frac{2(3+2d)}{8}+3a_2\frac{2d(d+2)-1}{16}+O(a_2^2)\right) \qquad\qquad =1+a_2\left[\frac{d(d+2)-1}{8}-\frac{1-p}{p}\frac{1-d}{2}\right]$$

$$=\frac{\sqrt2}{4}\left(3+a_2\frac18\left[\underbrace{-2(3+2d)}_{-6-4d}+\underbrace{3d(d+2)}_{3d^2+6d}-3/2\right]\right)$$

$$=\frac{\sqrt2}{4}\left(3+a_2\frac18\left[3d^2+2d-15/2\right]\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{3\sqrt2}{4}+a_2\frac{\sqrt2}{32}\left[3d^2+2d-15/2\right]=1+a_2\left(\frac{d(d+2)-1}{8}-\frac{1-p}{p}\frac{1-d}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow a_2\cdot\left[\frac{\sqrt2}{32}(3d^2+2d-15/2)-\frac{d(d+2)-1}{8}+\frac{1-p}{p}\frac{1-d}{2}\right]=1-\frac{3\sqrt2}{4}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_2(p)=\frac{1-3\sqrt2/4}{\frac{\sqrt2}{32}\left(3d^2+2d-\frac{15}{2}\right)-\frac{d(d+2)-1}{8}+\frac{1-p}{p}\frac{1-d}{2}}} \quad ;\ \lim_{p\to0}a_2(p)=0:\text{ok.}$$

On peut calculer le a_2 pour les cas 2), 3) et 4). On trouve différentes expressions, c.f. fichier mathematica a2ap.nb. En particulier, pour 4) on a :

$$\boxed{a_2(p)=-8\frac{3-2\sqrt2}{\sqrt2-6-4d-\frac{1-p}{p}\sqrt2\,8(d-1)}}$$

Comme la méthode 4) est la même que celle d'Emmanuel, i.e. pour $p=1$ dans 4) on a l'éq. de départ d'Emmanuel, alors on voit qu'on retrouve bien la même expression que celle d'Emmanuel pour a_2, si on pose $p=1$. Par contre, on n'a aucune idée si le terme de collision $p<1$ est bien décrit ici. Le calcul à l'ordre a_2^2 montrera que tel est bien le cas. On peut voir (cf. Mathematica) que les a_2 1) et 2) sont très similaires, et admettent tous une asymptote pour une certaine dimension, avec $p=1$. Les approximations faites dans ces cas sont tellement fortes, que des singularités artificielles ont été introduites. Par contre, les a_2 issus de 3) et 4) sont aussi très similaires, mais n'admettent pas d'asymptote. Pour trouver quelle est la manière de développer à l'ordre linéaire qui soit telle que le a_2 ainsi obtenu soit le "meilleur", il faut calculer le a_2 à l'ordre quadratique. A cet ordre, on choisira le développement "à la Noije" qui est physiquement le plus relevant, et de plus à cet ordre les ambiguités doivent être moindres. Par ceci, on doit d'abord calculer $\lim_{c_1\to 0} \tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f})$ à l'ordre a_2^2 : (calcul exact dans le contexte du développ. Sonine jusqu'à a_2)

- terme de perte $\tilde{I}_p$: déjà calculé à l'ordre quadratique en page ③. Nouvelle contribution (négligée avant) :

$$-\frac{S_d\,\mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{d}}\,a_2^2\,\frac{d(d+2)}{8}\,\frac{1}{8}(-1)$$

- terme de gain $\tilde{I}_g$: $\beta=\frac{1+\alpha}{2\alpha}=1$; on a :

$$\left[1+a_2S_2(\beta^2c_x^2)\right]\left[1+a_2S_2\left(c_\perp^2+c_x^2(1-\beta)^2\right)\right] = \underbrace{1+O(a_2)}_{\text{déjà calculé}} + a_2^2\,S_2(\beta^2c_x^2)\,S_2\left(c_\perp^2+\cancel{c_x^2}\underbrace{(1-\beta)^2}_{=0}\right)$$

$$\Rightarrow S_2(\beta^2c_x^2)S_2(c_\perp^2) = S_2(c_x^2)S_2(c_\perp^2)$$
$$=\left[\frac{d^2}{8}c_x^4-\frac{d(d+2)}{4}c_x^2+\frac{d(d+2)}{8}\right]\cdot\left[\frac{d^2}{8}c_\perp^4-\frac{d(d+2)}{4}c_\perp^2+\frac{d(d+2)}{8}\right]$$
$$=\left(\frac{d^2}{8}\right)^2c_x^4c_\perp^4-\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}c_x^4c_\perp^2+\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{8}c_x^4-\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}c_x^2c_\perp^4+\left(\frac{d(d+2)}{4}\right)^2c_x^2c_\perp^2-\frac{d(d+2)}{4}\frac{d(d+2)}{8}c_x^2+\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{8}c_\perp^4-\frac{d(d+2)}{8}\frac{d(d+2)}{4}c_\perp^2+\left(\frac{d(d+2)}{8}\right)^2$$

Il s'agit du terme supplémentaire à traiter par rapport au calcul précédent (9 termes en tout). Notons $\tilde{I}_{g,2}$ cette contrib. supp., alors :

$$\tilde{I}_{g,2}=\frac{S_d}{\alpha^2}\left(\frac{d}{2\pi}\right)^d\int_0^\infty dc_x\,c_x\,e^{-d/2[\beta^2+(1-\beta)^2]c_x^2}\int dc_\perp\,e^{-\frac{d}{2}c_\perp^2}\,a_2^2[\dots]$$
$$=a_2^2\,\frac{S_d}{\alpha^2}\left(\frac{d}{2\pi}\right)^d\int_0^\infty dc_x\,c_x\,e^{-\gamma_xc_x^2}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}dc_\perp\,e^{-\gamma_\perp c_\perp^2}[\dots] \quad ;\left\{\begin{array}{l}\gamma_x=\frac{d}{2}[\beta^2+(1-\beta)^2]=d/2\\ \gamma_\perp=d/2=\gamma_x\end{array}\right\}\Rightarrow\gamma_x=\gamma_\perp=\gamma=d/2$$
$$=a_2^2\,S_d\left(\frac{d}{2\pi}\right)^d\Bigg[\left(\frac{d^2}{8}\right)^2J_x[5]J_\perp[4]-\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}J_x[5]J_\perp[2]+\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{8}J_x[5]J_\perp[0]-\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}J_x[3]J_\perp[4]+\left(\frac{d(d+2)}{4}\right)^2J_x[3]J_\perp[2]$$
$$-\frac{d(d+2)}{4}\frac{d(d+2)}{8}J_x[3]J_\perp[0]+\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{8}J_x[1]J_\perp[4]-\frac{d(d+2)}{8}\frac{d(d+2)}{4}J_x[1]J_\perp[2]+\left(\frac{d(d+2)}{8}\right)^2J_x[1]J_\perp[0]\Bigg]$$

On divise et multiplie tout par $J_x[1]J_\perp[0]$, et regarde les termes en $J_x[i]$:

$J_x[1]$: $$\frac{1}{\cancel{J_x[1]}J_\perp[0]}\left[\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{8}\cancel{J_x[1]}J_\perp[4]-\frac{d(d+2)}{8}\frac{d(d+2)}{4}\cancel{J_x[1]}J_\perp[2]+\left(\frac{d(d+2)}{8}\right)^2\cancel{J_x[1]}J_\perp[0]\right]$$
$$=\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{8}\underbrace{\frac{J_\perp[4]}{J_\perp[0]}}_{=\left(\frac{\gamma_\perp}{\pi}\right)^{\frac{d-1}{2}}\frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\gamma_\perp^{\frac{d+3}{2}}}\frac{d+1}{2}\frac{d-1}{2}=\frac{1}{\gamma_\perp^2}\frac{d+1}{2}\frac{d-1}{2}}-\frac{d(d+2)}{8}\frac{d(d+2)}{4}\underbrace{\frac{J_\perp[2]}{J_\perp[0]}}_{=\left(\frac{\gamma_\perp}{\pi}\right)^{\frac{d-1}{2}}\frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\gamma_\perp^{\frac{d+1}{2}}}\frac{d-1}{2}=\frac{1}{\gamma_\perp}\frac{d-1}{2}}+\left(\frac{d(d+2)}{8}\right)^2\underbrace{\frac{J_\perp[0]}{J_\perp[0]}}_{=1}$$
$$=\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{8}\frac{d+1}{2}\frac{d-1}{2}\underbrace{\frac{1}{\gamma^2}}_{=\frac{4}{d^2}}-\frac{d(d+2)}{8}\frac{d(d+2)}{4}\frac{d-1}{2}\underbrace{\frac{1}{\gamma}}_{=\frac{2}{d}}+\left(\frac{d(d+2)}{8}\right)^2$$
$$=\frac{d(d+2)(d+1)(d-1)}{8\cdot 8}-\frac{d(d+2)^2(d-1)}{4\cdot 8}+\left(\frac{d(d+2)}{8}\right)^2$$

$J_x[3]$: $$\frac{1}{J_x[1]J_\perp[0]}\left[-\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}J_x[3]J_\perp[4]+\left(\frac{d(d+2)}{4}\right)^2J_x[3]J_\perp[2]-\frac{d(d+2)}{4}\frac{d(d+2)}{8}J_x[3]J_\perp[0]\right]$$
$$=\underbrace{\frac{J_x[3]}{J_x[1]}}_{=\frac{1}{2\gamma_x^2}2\gamma_x=\frac{1}{\gamma_x}}\cdot\left[-\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}\underbrace{\frac{J_\perp[4]}{J_\perp[0]}}_{=\frac{1}{\gamma_\perp^2}\frac{d+1}{2}\frac{d-1}{2}}+\left(\frac{d(d+2)}{4}\right)^2\underbrace{\frac{J_\perp[2]}{J_\perp[0]}}_{=\frac{1}{\gamma_\perp}\frac{d-1}{2}}-\frac{d(d+2)}{4}\frac{d(d+2)}{8}\right]$$
$$=-\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}\frac{d+1}{2}\frac{d-1}{2}\underbrace{\frac{1}{\gamma^3}}_{=8/d^3}+\left(\frac{d(d+2)}{4}\right)^2\frac{d-1}{2}\underbrace{\frac{1}{\gamma^2}}_{=4/d^2}-\frac{d^2(d+2)^2}{4\cdot 8}\underbrace{\frac{1}{\gamma}}_{=2/d}$$
$$=-\frac{(d+2)(d+1)(d-1)}{4\cdot 4}+\frac{(d+2)^2(d-1)}{4\cdot 2}-\frac{d(d+2)^2}{4\cdot 4}$$

$J_x[5]$: $$\frac{1}{J_x[1]J_\perp[0]}\left[\left(\frac{d^2}{8}\right)^2J_x[5]J_\perp[4]-\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}J_x[5]J_\perp[2]+\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{8}J_x[5]J_\perp[0]\right]$$
$$=\underbrace{\frac{J_x[5]}{J_x[1]}}_{=\frac{1}{\gamma^3}2\gamma=\frac{2}{\gamma^2}}\cdot\left[\left(\frac{d^2}{8}\right)^2\underbrace{\frac{J_\perp[4]}{J_\perp[0]}}_{=\frac{1}{\gamma^2}\frac{d+1}{2}\frac{d-1}{2}}-\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}\underbrace{\frac{J_\perp[2]}{J_\perp[0]}}_{=\frac{1}{\gamma}\frac{d-1}{2}}+\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{8}\right]$$
$$=\left(\frac{d^2}{8}\right)\frac{d+1}{2}\frac{d-1}{2}\underbrace{\frac{2}{\gamma^4}}_{=16/d^4}-\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{4}\frac{d-1}{2}\underbrace{\frac{2}{\gamma^3}}_{=8/d^3}+\frac{d^2}{8}\frac{d(d+2)}{8}\underbrace{\frac{2}{\gamma^2}}_{=4/d^2}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{d+1}{2}\frac{d-1}{2}-\frac{d+2}{2}\frac{d-1}{2}+\frac{d(d+2)}{8}$$
$$=\frac{(d+1)(d-1)}{8}-\frac{(d+2)(d-1)}{4}+\frac{d(d+2)}{8}$$

Avec : $J_x[1]J_\perp[0]=\frac{1}{2\gamma_x}\left(\frac{\pi}{\gamma_\perp}\right)^{\frac{d-1}{2}}=\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{d-1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{2}{d}\left(\frac{2\pi}{d}\right)^{\frac{d-1}{2}}=\frac{1}{d}\left(\frac{2\pi}{d}\right)^{\frac{d-1}{2}}$

Ainsi :

$$\tilde{I}_{g,2}=a_2^2\,S_d\left(\frac{d}{2\pi}\right)^d\frac{1}{d}\left(\frac{2\pi}{d}\right)^{\frac{d-1}{2}}[\dots]$$
$$=a_2^2\,S_d\,\frac{1}{d}\underbrace{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^d\left(\frac{2\pi}{d}\right)^{d/2}}_{=\left(\frac{d}{2\pi}\right)^{d/2}=\mathcal{M}(0)}\left(\frac{2\pi}{d}\right)^{-1/2}[\dots]$$
$$=a_2^2\,S_d\,\mathcal{M}(0)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\frac{\sqrt{d}}{d}}_{=1/\sqrt{d}=1/\sqrt{2}\sqrt{2/d}}[\dots]$$
$$=a_2^2\,S_d\,\mathcal{M}(0)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{d}}\,[\dots]$$

$$\tilde{I}_{g,2} = a_2^2 \frac{S_d M(0)}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2}{d}} \cdot \left[\frac{d(d+2)(d+1)(d-1)}{8\cdot 8} - \frac{d(d+2)^2(d-1)}{4\cdot 8} + \left(\frac{d(d+2)}{8}\right)^2 - \frac{(d+2)(d+1)(d-1)}{4\cdot 4} + \frac{(d+2)^2(d-1)}{4\cdot 2} - \frac{d(d+2)^2}{4\cdot 4} + \frac{(d+1)(d-1)}{8} - \frac{(d+2)(d-1)}{4} + \frac{d(d+2)}{8} \right]$$

Ce calcul a été vérifié 2 fois. On peut simplifier le terme entre [...], et ainsi les deux termes supplémentaires sont :

$$\tilde{I}_{p,2} = \frac{S_d M(0)}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2}{d}}\, a_2^2 \frac{d(d+2)}{8\cdot 8}$$

$$\tilde{I}_{g,2} = \frac{S_d M(0)}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2}{d}}\, a_2^2\, 3\frac{d(d-2)}{8\cdot 8}$$

Leur somme :

$$\tilde{I}_{p,2} + \tilde{I}_{g,2} = \frac{S_d M(0)}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2}{d}}\, a_2^2 \frac{3d^2-6d+d^2+2d}{8\cdot 8} = \frac{S_d M(0)}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2}{d}}\, a_2^2 \frac{d(d+2)}{16}$$

Donc :

$$\lim_{c_1\to 0} \tilde{I}(f,f) = \tilde{I} = \frac{S_d M(0)}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2}{d}} \left[A + B a_2 + C a_2^2 \right] \quad ; \quad C = \frac{d(d+2)}{16} \quad ; \; A = 0 \; ; \; B = \frac{1-d}{2}$$

Ainsi, en reprenant la relation (*) du calcul avant la linéarisation en a_2, on voit qu'il suffit d'ajouter le terme $C a_2^2$:

$$\underbrace{\left(1 - \tfrac{1}{16}a_2\right)\left(1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)}_{} \frac{\sqrt{2}}{4}\left(3 - a_2\tfrac{1}{4}(3+2d)\right) = \underbrace{\left(1 - \frac{a_2}{8}\right)\left(1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)}_{} - \frac{1-p}{p}\left(a_2\frac{1-d}{2} + a_2^2\frac{d(d+2)}{16} \right)$$

$$= 1 + a_2\frac{d(d+2)}{8} - \frac{1}{16}a_2 - a_2^2\frac{1}{16}\frac{d(d+2)}{8} \qquad\qquad = 1 + a_2\frac{d(d+2)}{8} - a_2\frac{1}{8} - a_2^2\frac{d(d+2)}{8\cdot 8}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left[1 + a_2\frac{1}{8}\left\{d(d+2) - \frac{1}{2}\right\} - a_2^2\frac{d(d+2)}{8\cdot 16}\right]\left(3 - a_2\frac{3+2d}{4}\right)}_{} = 1 + a_2\frac{1}{8}\left[d(d+2) - 1\right] - a_2^2\frac{d(d+2)}{8^2} - \frac{1-p}{p}\frac{1-d}{2}a_2 - \frac{1-p}{p}\frac{d(d+2)}{16}a_2^2$$

$$= 3 + a_2\left[\frac{3}{8}\left(d(d+2) - 1/2\right) - \frac{1}{4}(3+2d)\right] + a_2^2\left[-\frac{3+2d}{4\cdot 8}\left(d(d+2) - \frac{1}{2}\right) - \frac{3d(d+2)}{8\cdot 16}\right] + O(a_2^3)$$

$$\Longrightarrow a_2^2 \underbrace{\left[-\frac{3+2d}{4\cdot 8}\left(d(d+2) - 1/2\right)\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3d(d+2)}{8\cdot 16}\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{d(d+2)}{8^2} + \frac{1-p}{p}\frac{d(d+2)}{16} \right]}_{:=A} + a_2 \underbrace{\left[\frac{3}{8}\left(d(d+2) - 1/2\right)\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}(3+2d)\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{8}\left\{d(d+2) - 1\right\} + \frac{1-p}{p}\frac{1-d}{2} \right]}_{:=B} + \underbrace{3\frac{\sqrt{2}}{4} - 1}_{:=C} = 0$$

Simplification : on peut voir en simplifiant les termes que :

QUADRATIQUE

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \frac{d(d+2)}{64}\left[1 - \frac{15}{8}\sqrt{2} - \sqrt{2}\,d\right] + \frac{\sqrt{2}}{256}(3+2d) + \frac{1-p}{p}\frac{d(d+2)}{16} \\ B &= \frac{d(d+2)}{32}(3\sqrt{2}-4) - \frac{15\sqrt{2}-8}{64} - \frac{\sqrt{2}}{8}d + \frac{1-p}{p}\frac{1-d}{2} \quad ; \; C = 3\frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \\ a_2 &= \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \end{aligned}} \xleftrightarrow{\;10^{-4}\;} \boxed{a_2 = -8\frac{3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 6 - 4d - \frac{1-p}{p}\sqrt{2}\,8(d-1)}}$$

LINÉAIRE

Cette solution est proche à 10^{-4} de la solution de Emmanuel pour $p=1$, donc les approximations faites ne portent pas à conséquence. La connaissance de cette solution à l'ordre quadratique permet de dire que la solution linéaire 4) en est proche à 10^{-4} ! 4) constitue donc une excellente relation pour "vendre" le produit, et qui de plus est une excellente relation. DSMC permet ensuite de valider la chose. Connaissant a_2, on a aussi α :

$$\alpha = \frac{\langle c_{12}\, c_1^2 \rangle}{\langle c_{12} \rangle \langle c_1^2 \rangle} = 1 + \frac{1}{2d} + \frac{a_2}{8}\left(2 + \frac{3}{d}\right) + O(a_2^2)$$

~~Annihilation probabiliste: calcul du a_2 et vérification dans les cas limites p→ 1 (annihilation pure, vérificati~~ avec article Trizac) et p→ 0 (gaz élastique, là cela doit être égal à 0). Dans le premier calcul je résouds pour l'ordre quadratique en a2 sauf pour le terme de collision, ce qui me permet de vérifier mes calculs analytique: Puis dans la seconde partie je calcule le terme de collision à l'ordre quadratique et inclus la modification dans "A".

```
[370]:= a2 =.; a2Emmanuel =.; d =.; p =.; sol =.; a2apOrdre2 =.; a2apOrdre1 =.; eqLHS =.; eqRHS =.;
        eqLHS = Collect[Expand[
           Simplify[Expand[(1 - 1 / 16 * a2) * (1 + a2 * d * (d + 2) / 8) * Sqrt[2] / 4 * (3 - a2 / 4 * (3 + 2 * d))]]], a2]
        eqRHS = Collect[Expand[Simplify[Expand[(1 - a2 / 8) * (1 + a2 * d * (d + 2) / 8)]]], a2]
```

:[371]=

$$\frac{3}{2\sqrt{2}} + a2\left(-\frac{15}{32\sqrt{2}} + \frac{d}{8\sqrt{2}} + \frac{3\,d^2}{16\sqrt{2}}\right) + a2^2\left(\frac{3}{128\sqrt{2}} - \frac{13\,d}{128\sqrt{2}} - \frac{31\,d^2}{256\sqrt{2}} - \frac{d^3}{32\sqrt{2}}\right) + a2^3\left(\frac{3\,d}{512\sqrt{2}} + \frac{7\,d^2}{1024\sqrt{2}} + \frac{d^3}{512\sqrt{2}}\right)$$

372]=

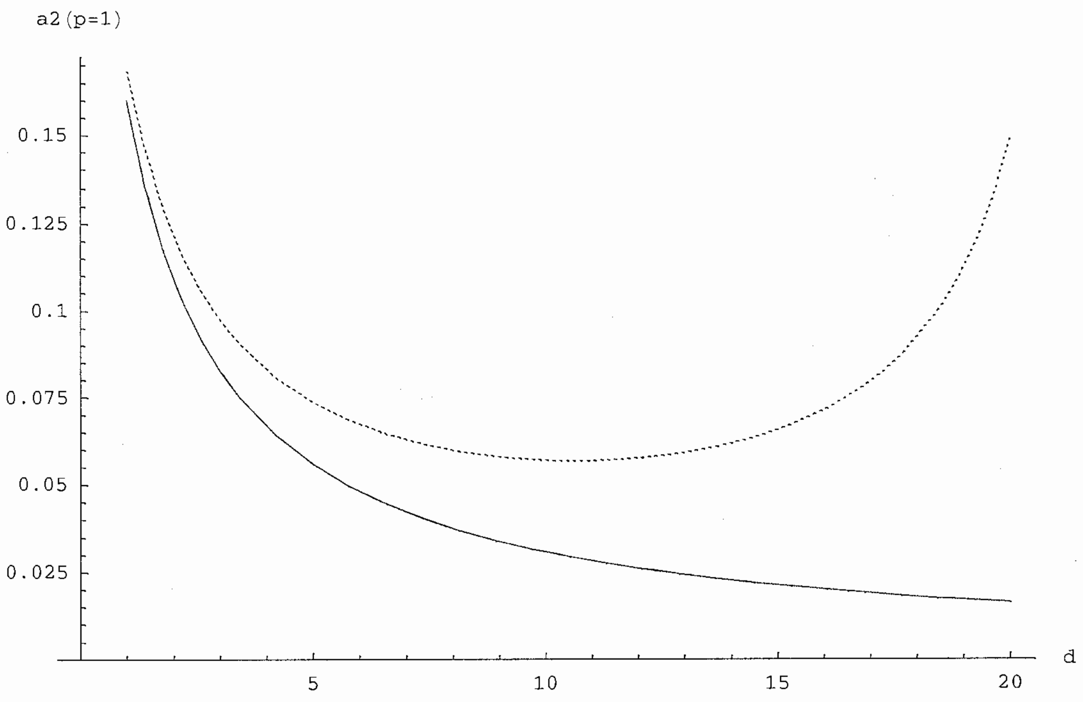
$$1 + a2^2\left(-\frac{d}{32} - \frac{d^2}{64}\right) + a2\left(-\frac{1}{8} + \frac{d}{4} + \frac{d^2}{8}\right)$$

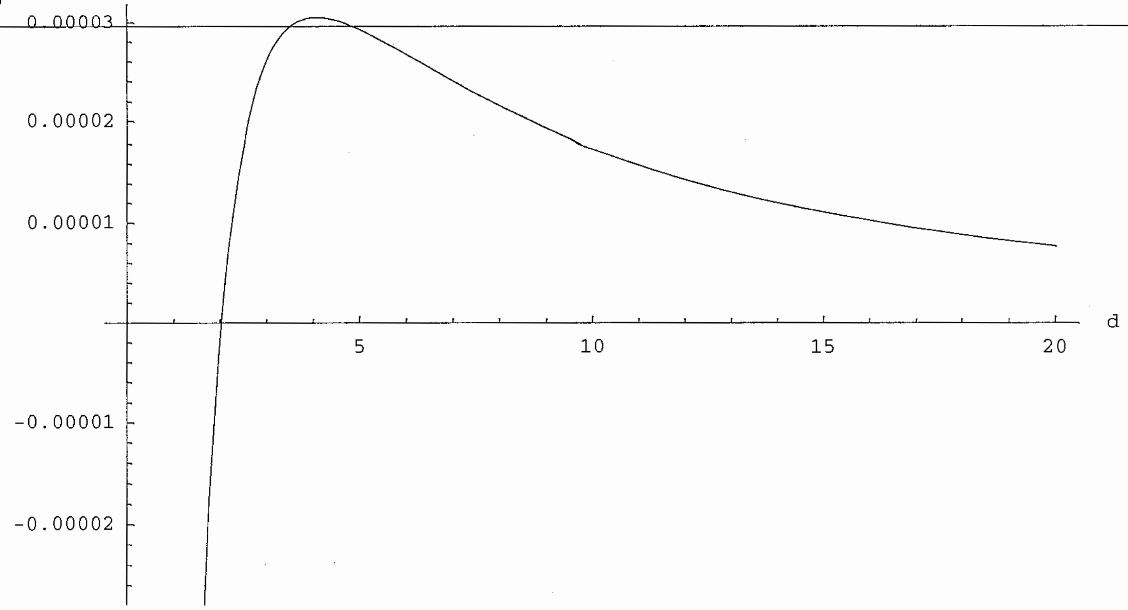
38]:= sol =

$$\text{Simplify}\Big[\text{ExpandAll}\Big[\text{Solve}\Big[\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{15\,a2}{32\sqrt{2}} + \frac{3\,a2^2}{128\sqrt{2}} + \frac{a2\,d}{8\sqrt{2}} - \frac{13\,a2^2\,d}{128\sqrt{2}} + \frac{3\,a2\,d^2}{16\sqrt{2}} - \frac{31\,a2^2\,d^2}{256\sqrt{2}} - \frac{a2^2\,d^3}{32\sqrt{2}}$$

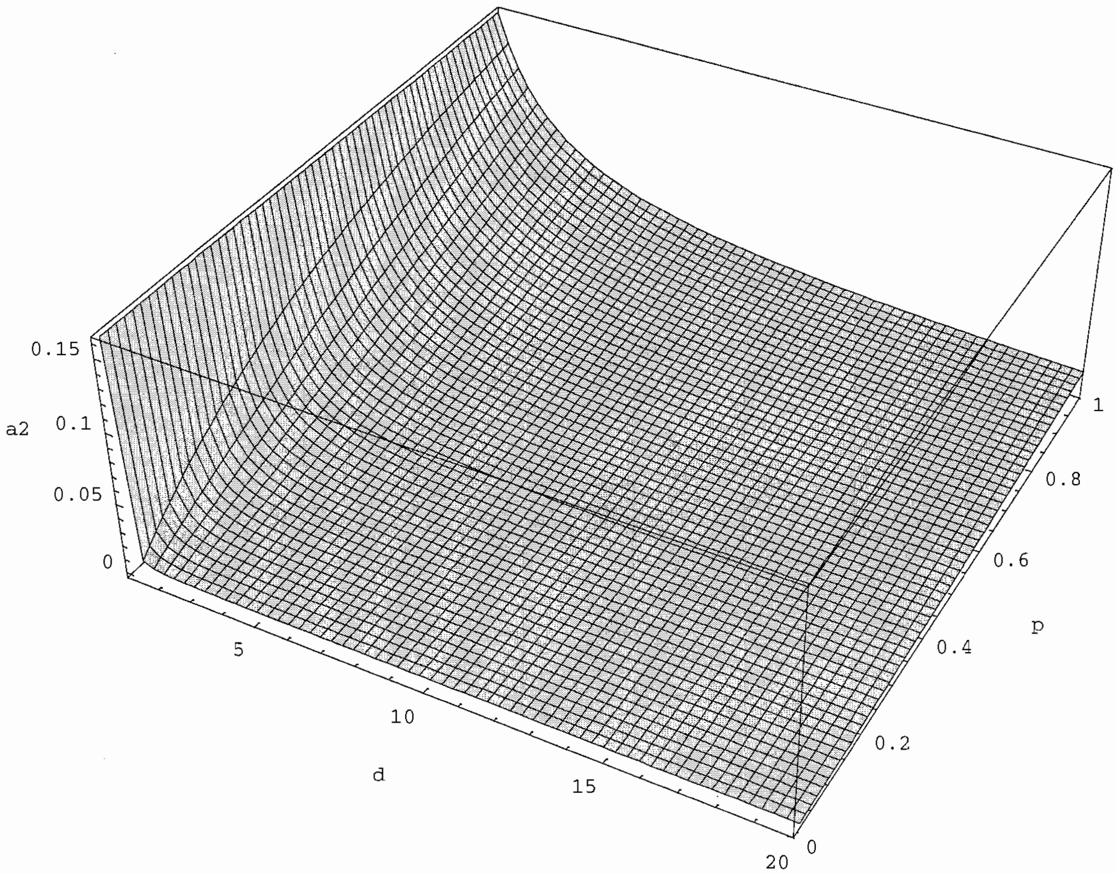
$$1 - \frac{a2}{8} + \frac{a2\,d}{4} - \frac{a2^2\,d}{32} + \frac{a2\,d^2}{8} - \frac{a2^2\,d^2}{64} - (1 - p) / p * (-d + 1) / 2 * a2,\ a2\Big]\Big]\Big];$$

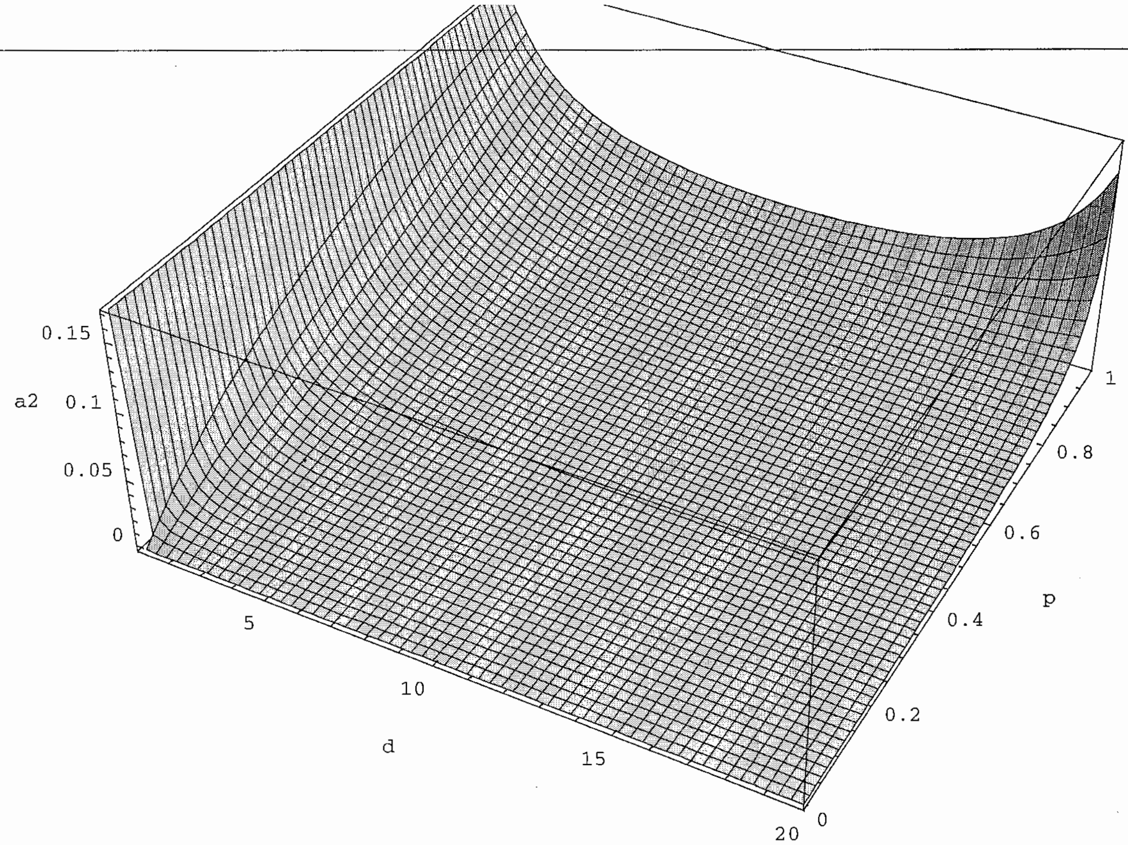
```
a2apOrdre2[d_, p_] = FullSimplify[Expand[a2 /. sol[[2]]]];
a2apOrdre1[d_, p_] =
  (1 - 3 * Sqrt[2] / 4) / (Sqrt[2] / 32 * (3 * d ^ 2 + 2 * d - 15 / 2) - (d * (d + 2) - 1) / 8 + (1 - p) / p * (-d + 1) / 2);
a2Emmanuel[d_] = 8 * (d * (3 - 2 * Sqrt[2])) / (4 * d ^ 2 + d * (6 - Sqrt[2]));
Plot[{a2Emmanuel[x], a2apOrdre2[x, 1], a2apOrdre1[x, 1]}, {x, 1, 20},
  PlotRange → {0, Automatic}, AxesLabel → {"d", "a2(p=1)"}, PlotStyle → {{Dashing[{0.1, 0.0}]},
    {{Dashing[{0.01, 0.005}]}, RGBColor[0, 0, 1]}, {Dashing[{0.002, 0.005}]}}];
Plot[a2Emmanuel[x] - a2apOrdre2[x, 1], {x, 1, 20}, AxesLabel → {"d", "a2(p=1)"}];
Limit[a2apOrdre2[2, p], p → 0]
Plot3D[a2apOrdre2[x, y], {x, 1, 20}, {y, 0, 1},
  PlotPoints → 60, AxesLabel → {"d", "p", "a2"}, PlotRange → All];
Plot3D[a2apOrdre1[x, y], {x, 1, 20}, {y, 0, 1}, PlotPoints → 60,
  AxesLabel → {"d", "p", "a2"}, PlotRange → All];
```




0.00003
0.00002
0.00001
-0.00001
-0.00002
5
10
15
20
d

:[434]= 0


0.15
a2
0.1
0.05
0
5
10
d
15
20
0
0.2
0.4
p
0.6
0.8
1



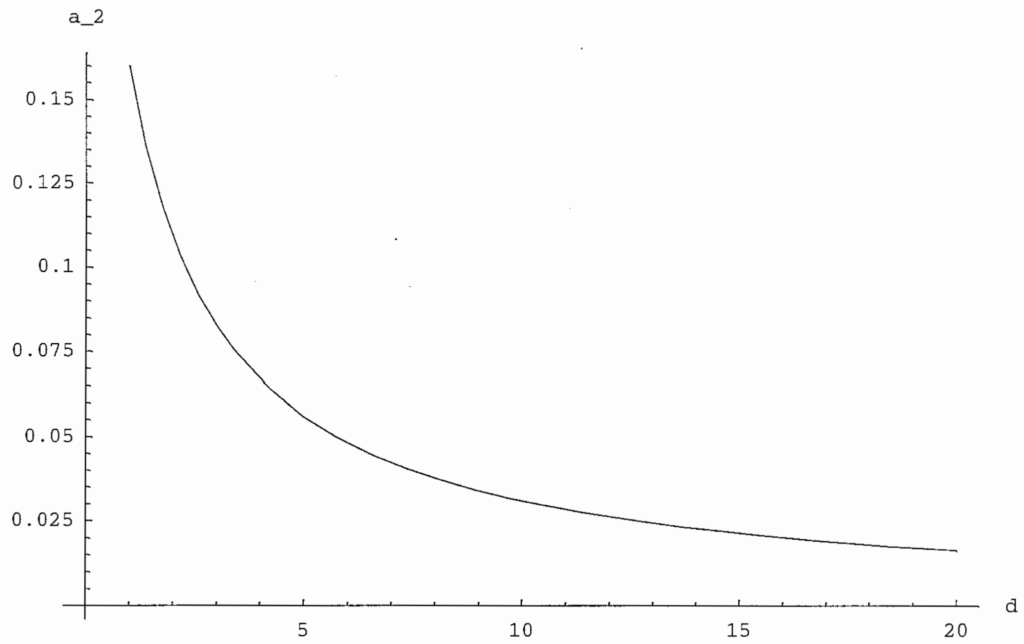
limension, y: a_(d), p=1. En noir continu c'est le a_2 obtenu par Trizac, en bleu trait-tillé (ici confondu avec le noir) c'est le cas limitede ution de l'annihilation probabiliste à l'ordre 2, et en noir point-tillé c'est la solution de l'annihilation probabiliste à l'ordre linéaire en a_2. (t que l'ordre linéaire est très mauvais car admet une asymptote, et ceci alors qu'à la base on avait la même équation que dans le cas de ınihilation pure. Pourquoi est-ce donc si mauivais? Parce que le nouveau terme de collisions élastiques n'a pas en préfacteur la fonction f(elle contient une correction en a_2. Donc on ne peut pas simplifier toute l'équation par f(0), et donc en linéarisant on réalise une approxin ı supplémentaire car il y a un nouveau terme en a_2. En allant à l'orde quadratique on constate que l'erreur due à cette simplification ›ossible devient négligeable, comme le montre le second graphe donnant la différence entre la solution d'Emmanuel et celle de l'annihilati ›abiliste à l'ordre 2.

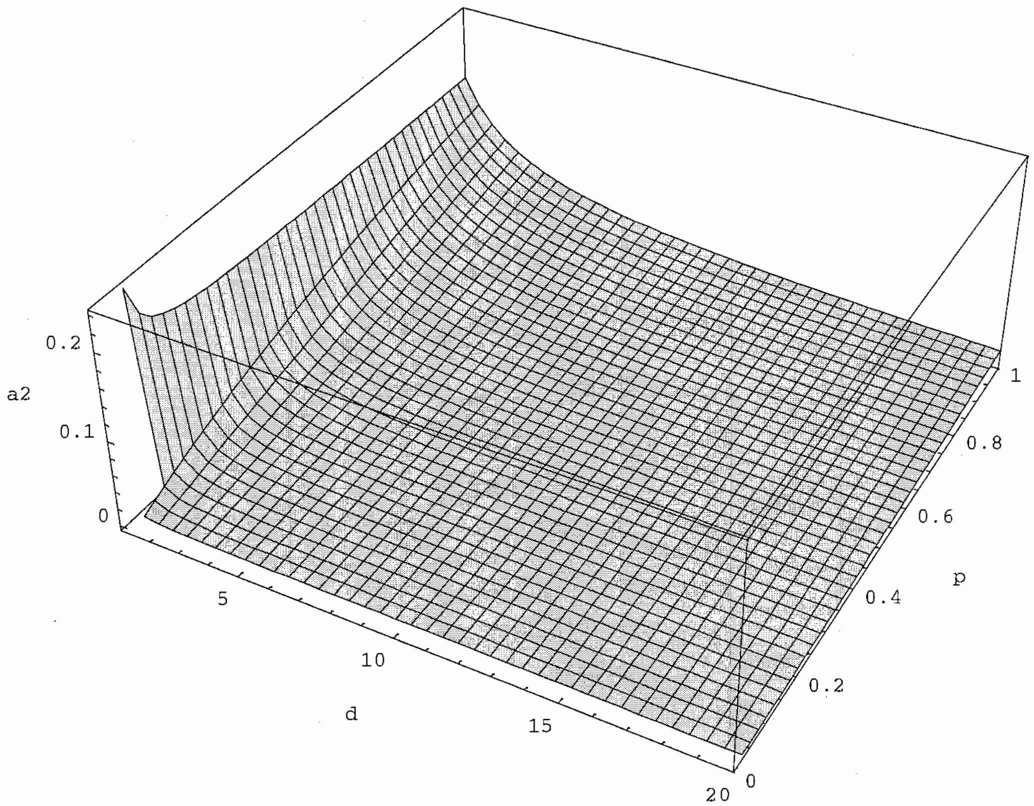
leux graphes 3D montrent:1) Le premier:a2 obtenu à l'ordre (semi) quadratique (linéaire dans le terme de collision) 2) Second hique:a2 obtenu à l'ordre linéaire.

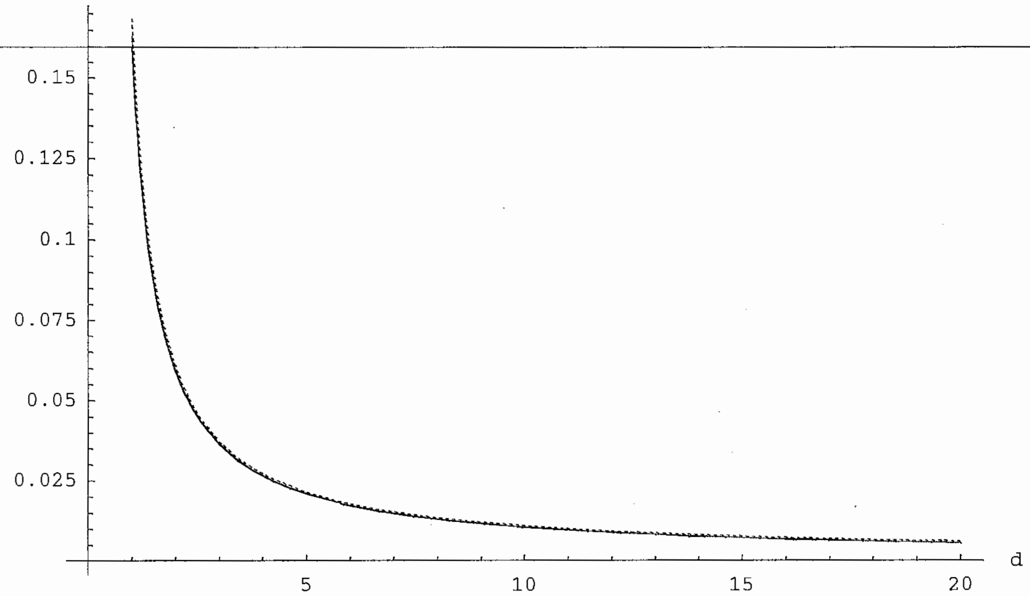
'érification que ma solution analytique sur papier est bien la même que celle donnée par *Mathematica*. Ok, cela a été vérifié, donc mainte ajoute le terme dans "A" qui décrit l'ordre quadratique en a2.

```
381]:= A = d * (d + 2) / 64 * (1 - 15 * Sqrt[2] / 8 - Sqrt[2] * d) + Sqrt[2] * (3 + 2 * d) / 256 + (1 - p) / p * d (5 * d - 2) / 64 ;
       B = d * (d + 2) / 32 * (3 * Sqrt[2] - 4) - (15 * Sqrt[2] - 8) / 64 - Sqrt[2] / 8 * d + (1 - p) / p * (-d + 1) / 2;
       Ce = 3 * Sqrt[2] / 4 - 1;
       a2anal[d_, p_] = FullSimplify[ExpandAll[(-B - Sqrt[B^2 - 4 * A * Ce]) / (2 * A)]]
       Plot[{a2apOrdre2[x, 1], a2anal[x, 1]}, {x, 1, 20}, AxesLabel → {"d", "a_2"}];
       Plot3D[a2anal[x, y], {x, 1, 20}, {y, 0, 1},
         PlotPoints → 40, AxesLabel → {"d", "p", "a2"}, PlotRange → All];
       Plot[{a2apOrdre2[x, 0.5], a2apOrdre1[x, 0.5], a2anal[x, 0.5]}, {x, 1, 20},
         AxesLabel → {"d", "a2(p=0.5)"}, PlotStyle → {{Dashing[{0.1, 0.0}]},
           {Dashing[{0.002, 0.005}]}, {{Dashing[{0.01, 0.005}]}, RGBColor[0, 0, 1]}}];
       Plot[{a2apOrdre2[3, p], a2apOrdre1[3, p], a2anal[3, p]}, {p, 0, 1},
         AxesLabel → {"p", "a2(d=3)"}, PlotStyle → {{Dashing[{0.1, 0.0}]},
           {Dashing[{0.002, 0.005}]}, {{Dashing[{0.01, 0.005}]}, RGBColor[0, 0, 1]}}];
```

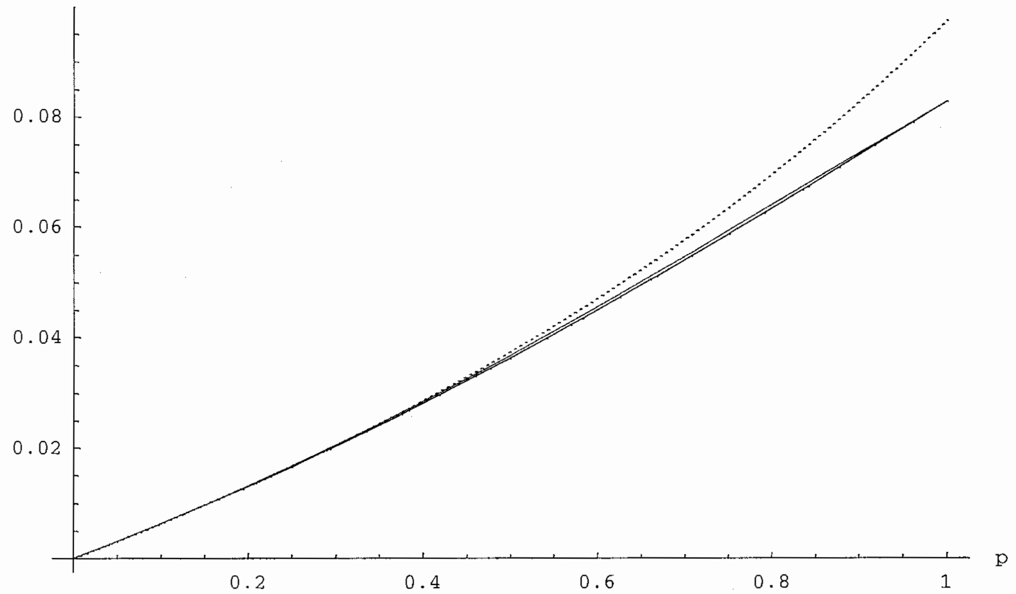
$$p\sqrt{\left(\frac{1}{p^2}\left(1024\,(-1+d)^2+64\left(4\,(-6+d\,(8+d\,(-1+2\,d)))-\sqrt{2}\,(15+d\,(-25+d\,(13+6\,d)))\right)p+2\left(369+632\,d+388\,d^2+112\,d^3+68\,d^4-8\sqrt{2}\,(-57+d\,(142+d\,(9+2\,d\,(4+3\,d))))\right)p^2\right)\right)}\Big/\left(\sqrt{2}\,(-6+d\,(26+d\,(31+8\,d)))\,p+8\,d\,(2-5\,d+4\,(-1+d)\,p)\right)$$







a2(d=3)



premier graphe montre deux courbes confondues: notre calcul avec A, B et C simplifiés (dans la limite p=1), et le calcul résolu par Math tica (qui est très proche de celui de Emmanuel). Don en résumé, on voit que dans la limite p = 1 on a bien le même résultat qu'Emmanuel.

te solution est meilleure: si p=0, alors il n'y a pas d'annihilation et donc a2=0, ce qui est bien correct (dans le cas du développement linéa avait une divergence ici! Donc c'est en effet bien mieux de ce point de vue: cela régularise le cas p=0). Si p=1, alors on a l'annihilation pu n retrouve le résultat d'Emmanuel en fonction de la dimension.

troisième graphique montre pour p=0.5 la différence entre l'ordre linéaire, quadratique partiel (terme tilde I linéaire) et quadratique tota me tilde I quadratique). Attention: le calcul linéaire est toujours mauvais car il a une asymptote, néanmoins cette asymptote surgit pour ndes dimensions. On voit que ce calcul linéaire n'est pas si mauvais que cela, pour de faibles dimensions. Le calcul linéaire est le moins b p=1, c'est-à-dire pour l'annihilation pure.

uatrième graphe montre pour d=3 la différence entre l'ordre linéaire,quadratique partiel (terme tilde I linéaire) et quadratique total (tern I quadratique) en fonction de la probabilité p.

'ests et "brouillon".

rification de l'ordre quadratique de \tilde I

```
(d * (d + 2) / 8) ^ 2 - (d + 2) * (d + 1) * (d - 1) / 16 + (d + 2) ^ 2 * (d - 1) / 8 -
 d * (d + 2) ^ 2 / 16 + (d + 1) * (d - 1) / 8 - (d + 2) * (d - 1) / 4 + d * (d + 2) / 8 + d * (d + 2) / 64]]
```

:[389]= $\frac{1}{16}(-1+d)\,d$

.cul de a2(p) de l'annihilation probabiliste: ambiguités pour trouver le meilleur "fit" des simulations DSMC. Tout ce qu'il faut changer dai
:uite c'est "expr".

`476]:=

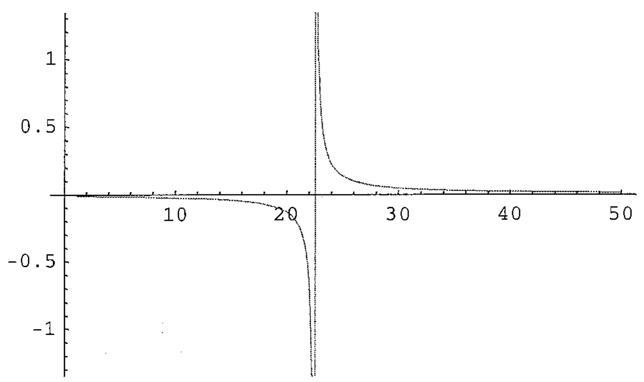
```
p =.; a2 =.; c12 =.; A =.; tildeI =.; d =.; B =.; sol =.; f0 =.;
c12 = 1 - a2 / 16; f0 = 1 + a2 * d (d + 2) / 8; A = Sqrt[2] / 4 * (3 - a2 * (3 + 2 * d) / 4);
B = 1 - a2 / 8; tildeI = - (1 - p) / p * (-d + 1) / 2 * a2;
expr1 = c12 * f0 * A - B * f0 - tildeI;
expr2 = f0 * A - B * f0 / c12 - tildeI / c12;
expr3 = c12 * A - B - tildeI / f0;
expr4 = A - B / c12 - tildeI / (c12 * f0);
sol1 =
 Solve[FullSimplify[ExpandAll[Coefficient[a2 * Simplify[Expand[Series[expr1, {a2, 0, 1}]]], a2] +
      Coefficient[Simplify[Expand[Series[expr1, {a2, 0, 1}]]], a2] * a2]] == 0, a2]
sol2 = Solve[FullSimplify[ExpandAll[Coefficient[a2 * Simplify[Expand[Series[expr2, {a2, 0, 1}]]],
       a2] + Coefficient[Simplify[Expand[Series[expr2, {a2, 0, 1}]]], a2] * a2]] == 0, a2]
sol3 = Solve[FullSimplify[ExpandAll[Coefficient[a2 * Simplify[Expand[Series[expr3, {a2, 0, 1}]]],
       a2] + Coefficient[Simplify[Expand[Series[expr3, {a2, 0, 1}]]], a2] * a2]] == 0, a2]
sol4 = Solve[FullSimplify[ExpandAll[Coefficient[a2 * Simplify[Expand[Series[expr4, {a2, 0, 1}]]],
       a2] + Coefficient[Simplify[Expand[Series[expr4, {a2, 0, 1}]]], a2] * a2]] == 0, a2]
a2ordre1ap1[d_, p_] = FullSimplify[ExpandAll[a2 /. sol1]] ;
a2ordre1ap2[d_, p_] = FullSimplify[ExpandAll[a2 /. sol2]] ;
a2ordre1ap3[d_, p_] = FullSimplify[ExpandAll[a2 /. sol3]] ;
a2ordre1ap4[d_, p_] = FullSimplify[ExpandAll[a2 /. sol4]] ;
Plot[a2anal[x, 1] - a2ordre1ap1[x, 1], {x, 1, 50},
  PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0]}, {Dashing[{0.1, 0.0}]}}];
Plot[a2anal[x, 1] - a2ordre1ap2[x, 1], {x, 1, 50},
  PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0]}, {Dashing[{0.1, 0.0}]}}];
Plot[a2anal[x, 1] - a2ordre1ap3[x, 1], {x, 1, 50},
  PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0]}, {Dashing[{0.1, 0.0}]}}];
Plot[a2anal[x, 1] - a2ordre1ap4[x, 1], {x, 1, 50},
  PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0]}, {Dashing[{0.1, 0.0}]}}];
N[a2ordre1ap4[2, 1]] - N[a2Emmanuel[2]]
```

:[482]= $\left\{\left\{a2 \to -\frac{16\left(-4+3\sqrt{2}\right)p}{-32(-1+d)+\left(-8(3+(-2+d)d)+\sqrt{2}\,(-15+4d+6d^2)\right)p}\right\}\right\}$

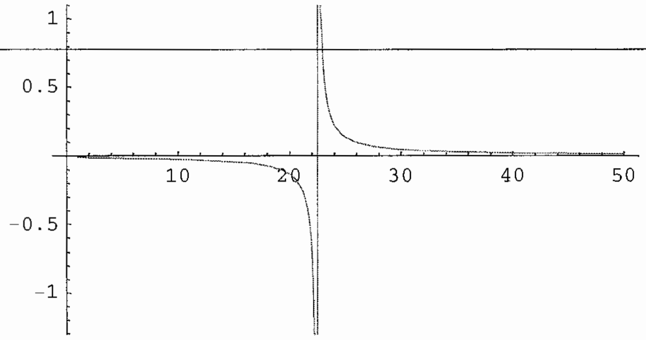
:[483]= $\left\{\left\{a2 \to -\frac{-32p+24\sqrt{2}\,p}{-16(-1+d)-2(7+2(-2+d)d)p+\sqrt{2}\,(-6+d(2+3d))p}\right\}\right\}$

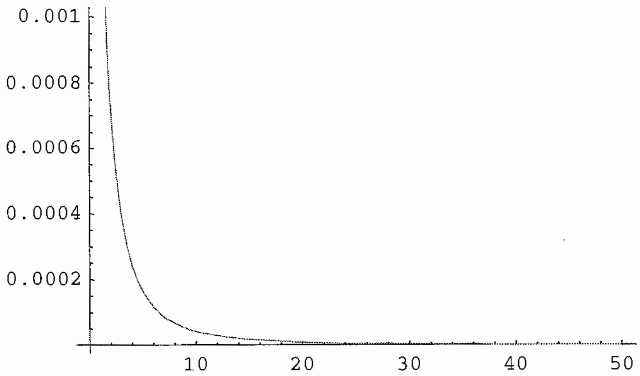
:[484]= $\left\{\left\{a2 \to -\frac{64p-48\sqrt{2}\,p}{32(-1+d)-8(-3+4d)p+\sqrt{2}\,(15+8d)p}\right\}\right\}$

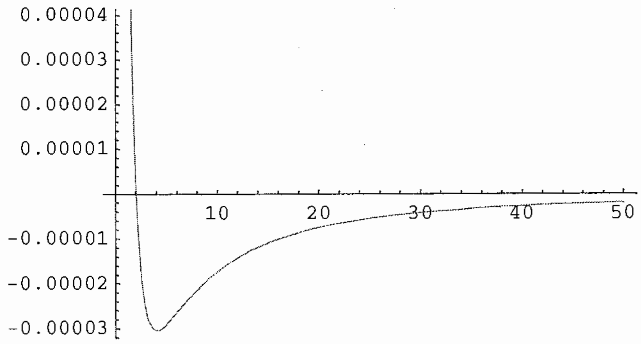
:[485]= $\left\{\left\{a2 \to -\frac{\left(-16+12\sqrt{2}\right)p}{-8(-1+d)+\left(-7+\sqrt{2}\,(-3-2d)+8d\right)p}\right\}\right\}$



; nb







[494]= $\{3.46945\times 10^{-16}\}$

ıclusion: on voit que la quatrième manière de développer est extrêmement proche de celle de l'ordre quadratique, et peut être utilisée plut
; l'ordre quadratique. Par contre, la relevance de ce développement se justifie par la connaissance de la solution à l'ordre quadratique qui e
ıc proche de ce choix de développement.

... vérifications supplémentaires. Article dynamics of ballistic annihilation, éq. (18), $k=1$:

$$(\partial_t + v_1\partial_{r_1}) f(1;t) = \int d2 \left[p\, T_a^v(1,2) + (1-p)\, T_c^v(1,2) \right] f(1,2;t) \qquad (1)$$

Soit:

$$n(t) = \int dv\, f(v,t)$$
$$r_j = \lambda x_j$$
$$T_a^v(1,2) = \sigma^{d-1} \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\cdot \underline{v}_{12})\, \Theta(-\hat\sigma\cdot\underline{v}_{12})\, \delta(r_{12} - \sigma\hat\sigma)$$
$$T_c^v(1,2) = -\sigma^{d-1} \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\cdot \underline{v}_{12})\, \Theta(-\hat\sigma\cdot\underline{v}_{12})\, \delta(r_{12} - \sigma\hat\sigma) \left[\frac{1}{\alpha^2} b^{-1} - 1 \right]$$
$$c_i = v_i/\bar v$$
$$f_2(r_1, v_1, r_2, v_2; t) = \left(n/\bar v^d\right)^2 \tilde f(x_1, c_1, x_2, c_2)$$

L'intégration sur c_1 de (1) donne une contribution non nulle seulement pour le terme décrivant l'annihilation. En effet, le terme de collisions conserve le nombre de particules. Ainsi:

$$\int dv_1 \underbrace{(\partial_t + v_1\partial_{r_1})}_{\partial_{r_1}\to 0:\ \text{homogène}} f_1(r_1, v_1; t) = p \int dv_1 \int dv_2 \int dr_2\, T_a^v(1,2)\, f(r_1, v_1, r_2, v_2; t)$$
$$= p \int \underbrace{dv_1}_{=\bar v^d c_1} \int \underbrace{dv_2}_{=\bar v^d c_2} \sigma^{d-1} \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\cdot \underbrace{\underline{v}_{12}}_{=\bar v c_{12}})\, \Theta(-\underbrace{\hat\sigma\cdot\underline{v}_{12}}_{\simeq \hat c_{12}})\, \underbrace{f(r_1, v_1, r_2, v_2; t)}_{= \frac{n^2}{\bar v^{2d}} \tilde f(c_1, c_2, \sigma\hat\sigma)}\Big|_{r_1 - r_2 = \sigma\hat\sigma}$$
$$= \sigma^{d-1} p\, \bar v\, n^2 \int dc_1 \int dc_2 \int d\hat\sigma\, (-1)\, (-\hat\sigma\cdot \underline{c}_{12})\, \Theta(-\hat\sigma\, \hat c_{12})\, \tilde f(c_1, c_2, \sigma\hat\sigma)$$
$$= -p\, \sigma^{d-1} n^2 \bar v \int dc_1 \int dc_2 \int d\hat\sigma\, (-\hat\sigma\cdot\underline{c}_{12})\, \Theta(-\hat\sigma\cdot\hat c_{12})\, \tilde f(c_1, c_2, \sigma\hat\sigma)$$
$$= -p\, \omega(t)\, n(t) \qquad (2)$$

avec:

$$\omega(t) = n(t)\, \bar v(t)\, \sigma^{d-1} \int dc_1 \int dc_2 \int d\hat\sigma\, (-\hat\sigma\cdot\underline{c}_{12})\, \Theta(-\hat\sigma\, \hat c_{12})\, \tilde f(c_1, c_2, \sigma\hat\sigma).$$

Ainsi (2) s'écrit:

$$\frac{d}{dt} n(t) = -p\, \omega(t)\, n(t) \qquad (3)$$

De même, si on intègre $\int dc_1 c_1^2$ l'éq. (1), alors comme dans notre cas $\alpha = 1$ la contribution du gaz élastique ne modifie pas l'énergie, et donc:

$$\frac{d}{dt}(n\bar v^2) = -p\, \alpha\, \omega(t)\, n\, \bar v^2$$

avec α donné par (32) de l'article "Dynamics...". Soit

$$dC = \omega\, dt \qquad (4)$$

alors:

$$(3) \Rightarrow \frac{dn}{n} = -p \underbrace{\omega\, dt}_{=dC} \quad \Rightarrow \quad n(t) = n_0\, e^{-p C(t)} \qquad (5)$$

$$(4) \Rightarrow d(n\bar v^2) = -p\, \alpha\, n\bar v^2 \underbrace{\omega\, dt}_{=dC}$$
$$\Rightarrow \frac{d(n\bar v^2)}{n\bar v^2} = -p\alpha\, dC \quad ; u = n\bar v^2$$
$$\Rightarrow du/u = -p\, \alpha\, dC$$
$$\Rightarrow u(t) = u_0\, e^{-p\alpha C(t)}$$
$$\Rightarrow n(t)\, \bar v^2 = n_0 \bar v_0^2\, e^{-p\alpha C(t)}$$
$$\overset{(5)}{\Rightarrow} \bar v^2(t) = \bar v_0^2\, e^{-p\alpha C(t)}\, e^{pC(t)}$$
$$\Rightarrow \bar v(t) = v_0\, e^{-p(\alpha-1)/2\, C(t)} \qquad (6)$$

Ainsi:

$$\frac{dC}{dt} = \omega \overset{\text{déf. (31) de } \omega}{=} n(t)\, \bar v(t) \cdot \sigma^{d-1} \int \dots$$
$$= \underbrace{n_0 \bar v_0\, \sigma^{d-1} \int \dots}_{=\omega_0}\ \frac{n(t)\bar v(t)}{n_0 \bar v_0}$$
$$= \omega_0\, e^{-pC(t)}\, e^{-p\frac{(\alpha-1)}{2} C(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dt} = \omega_0 \exp\left(-p\, \frac{\alpha+1}{2}\, C(t)\right)$$
$$\Rightarrow C(t) = \frac{2}{p}\, \frac{1}{1+\alpha} \ln\left(1 + p\, \frac{1+\alpha}{2}\, \omega_0 t\right) \qquad (7)$$

En effet, on vérifie facilement la solution (7):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{2}{p}\, \frac{1}{1+\alpha}\, \frac{1}{1 + p\frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t}\, p\, \frac{1+\alpha}{2}\, \omega_0 = \omega_0\, \frac{1}{1 + p\frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t} \\ \omega_0\, e^{-p\frac{1+\alpha}{2} C} &= \omega_0 \exp\left(-\ln\left(1 + p\frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t\right)\right) = \omega_0\, \frac{1}{1 + p\frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t} \end{aligned}\right\} \circleddash$$

Ainsi:

$$n(t) = n_0 \cdot \exp(-p\, C(t))$$
$$\overset{(7)}{=} n_0 \exp\left(-\frac{2}{1+\alpha} \ln\left(1 + p\frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t\right)\right)$$
$$= n_0 \left[1 + p\, \frac{1+\alpha}{2}\, \omega_0 t\right]^{-2/1+\alpha}$$

$$v(t) = v_0 \cdot \exp\left(-p\, \frac{\alpha-1}{2}\, C(t)\right)$$
$$\overset{(7)}{=} v_0 \exp\left(-\frac{\alpha-1}{1+\alpha} \ln\left(1 + p\frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t\right)\right)$$
$$= v_0 \left[1 + p\, \frac{1+\alpha}{2}\, \omega_0 t\right]^{-(\alpha-1)/1+\alpha}$$

Conclusion:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{n}{n_0} &= \left[1 + p\, \frac{1+\alpha}{2}\, \omega_0 t\right]^{-2/1+\alpha} \\ \frac{v}{v_0} &= \left[1 + p\, \frac{1+\alpha}{2}\, \omega_0 t\right]^{-(\alpha-1)/(\alpha+1)} \end{aligned}} \quad ; n(t) \sim t^{-\xi} \quad v(t) \sim t^{-\gamma} \qquad (8)$$

Les exposants sont les mêmes. Seule différence: échelle de temps modifiée par $t \to p.t$. La limite $p \to 1$ est bien définie. La limite $p \to 0$ aussi car on a alors $n/n_0 = v/v_0 = 1$, ce qui est ok!

Calcul de la correction à α: on a vu qu'on avait:

$$\underbrace{\lim_{c_1\to 0} \left[1 + \frac{1-\alpha}{2}(d + c_1\nabla_{c_1})\right] \tilde f(c_1)}_{= \left(1 + d\frac{1-\alpha}{2}\right)\tilde f(0)} = \lim_{c_1\to 0} \tilde f(c_1)\, \frac{1}{\langle c_{12}\rangle} \int dc_2\, |c_{12}|\, \tilde f(c_2) - \lim_{c_1\to 0} \frac{1-p}{p}\, \frac{1}{\langle c_{12}\rangle}\, \frac{1}{\beta_1}\, \tilde I(\tilde f, \tilde f) \quad ; \beta_1 = \pi^{\frac{d-1}{2}} / \Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left[1 + d\, \frac{1-\alpha}{2}\right] \tilde f(0) = \tilde f(0)\, \frac{\langle c_1\rangle}{\langle c_{12}\rangle} - \frac{1}{\langle c_{12}\rangle}\, \frac{1-p}{p}\, \frac{1}{\beta_1}\, \tilde I \qquad (9)$$

Si $p=1$, on a bien la relation connue :

$$1+\frac{d}{2}(1-\alpha) = \frac{\langle c_1\rangle}{\langle c_{12}\rangle} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1-\frac{2}{d}\left(\frac{\langle c_1\rangle}{\langle c_{12}\rangle}-1\right)$$

Dans le cas général on a :

$$d\,\frac{1-\alpha}{2} = \frac{\langle c_1\rangle}{\langle c_{12}\rangle} - \frac{1}{\tilde{f}(0)\langle c_{12}\rangle\beta_1}\,\frac{1-p}{p}\,\tilde{I} - 1$$

$$\Rightarrow 1-\alpha = \frac{2}{d}\left[\frac{\langle c_1\rangle}{\langle c_{12}\rangle} - 1 - \frac{1-p}{p}\,\frac{1}{\tilde{f}(0)\langle c_{12}\rangle\beta_1}\,\tilde{I}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1+\frac{2}{d}\left[1-\frac{\langle c_1\rangle}{\langle c_{12}\rangle}+\frac{1-p}{p}\,\frac{1}{\tilde{f}(0)\langle c_{12}\rangle\beta_1}\,\tilde{I}\right]} \qquad (10)$$

Calcul de α avec le développement de Sonine. On utilise :

$$\begin{cases} \dfrac{\langle c_1\rangle}{\langle c_{12}\rangle} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1-a_2/16\right) + O(a_2^2) \\ \tilde{I} = \dfrac{S_d\,\mathcal{M}(0)}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\dfrac{2}{d}}\,a_2\,\dfrac{1-d}{2} + O(a_2^2) \quad ; \quad S_d = \dfrac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \\ \tilde{f}(0) = \mathcal{M}(0)\left[1+a_2 S_2(0)\right] + O(a_2^2) = \mathcal{M}(0)\left[1+a_2\dfrac{d(d+2)}{8}\right] + O(a_2^2) \\ \langle c_{12}\rangle = \left(1-a_2/16\right)\langle c_{12}\rangle_0 + O(a_2^2) = \left(1-a_2/16\right)\dfrac{2}{\sqrt{d}}\,\Gamma\!\left(\frac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2) + O(a_2^2) \end{cases}$$

Ainsi on a :

$$\frac{\tilde{I}}{\tilde{f}(0)\langle c_{12}\rangle\beta_1} = \frac{S_d\,\cancel{\mathcal{M}(0)}}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{\cancel{d}}}\,a_2\,\frac{1-d}{2}\,\frac{1}{\cancel{\mathcal{M}(0)}}\,\frac{1}{1+a_2\frac{d(d+2)}{8}}\,\frac{1}{1-a_2/16}\,\frac{\cancel{\sqrt{d}}}{2}\,\frac{\Gamma(d/2)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}}\,\frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}}{\pi^{\frac{d-1}{2}}} + O(a_2^2)$$

$$= \frac{2\pi^{d/2}}{2\pi^{\frac{d-1}{2}+\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{\cancel{\Gamma(d/2)}}\,\sqrt{2}\,a_2\,\frac{1-d}{2}\,\cancel{\Gamma(d/2)}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\left(1-a_2/16\right)} + O(a_2^2)$$

$$= \frac{1-d}{2\sqrt{2}}\left[1-a_2\,\frac{1}{8}\left(d(d+2)-1/2\right)\right]a_2 + O(a_2^2)$$

$$= \frac{1-d}{2\sqrt{2}}\,a_2 + O(a_2^2) \qquad (11)$$

Ainsi (10) donne :

$$\alpha = 1+\frac{2}{d}\left[1-1/\sqrt{2}+a_2\,\frac{1}{16\sqrt{2}}+\frac{1-p}{p}\,\frac{1-d}{2\sqrt{2}}\,a_2\right] + O(a_2^2)$$

$$= 1+\frac{2}{d}\left(1-\sqrt{2}/2\right)+a_2\,\frac{2}{d}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1-p}{p}\,\frac{1-d}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0+\alpha_2 \\ \alpha_0 &= 1+\frac{2}{d}\left(1-\sqrt{2}/2\right) \\ \alpha_2 &= a_2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2d}\left(\frac{1}{8}-\frac{1-p}{p}(d-1)\right) \end{aligned}} \qquad (12)$$

On en tire les exposants ξ et γ :

$$\xi = \frac{2}{1+\alpha_0+\alpha_2} \; ; \; \gamma = \frac{\alpha_0+\alpha_2-1}{\alpha_0+\alpha_2+1} \; ; \; \xi = \xi_0+\xi_2 \; ; \; \gamma = \gamma_0+\gamma_2 \; ; \; \xi = \frac{2}{1+\alpha} \qquad (13)$$

On vérifie bien : $\xi_0+\gamma_0 = 1$, et $\xi_2+\gamma_2 = 0$, de sorte à ce que $\xi+\gamma = 1$ (à tout ordre).

Vérification de la <u>conjecture de Emmanuel</u>, PRL : α est donné, avec le chaos moléculaire, par :

$$\alpha = \frac{\langle c_{12}\,c_1^2\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^2\rangle} = 1+\frac{1}{2d}+a_2\,\frac{1}{8}\left(2+3/d\right)+O(a_2^2) = \alpha_0+a_2\alpha_2+O(a_2^2)$$

Or nous avons trouvé le a_2 de la relation linéaire :

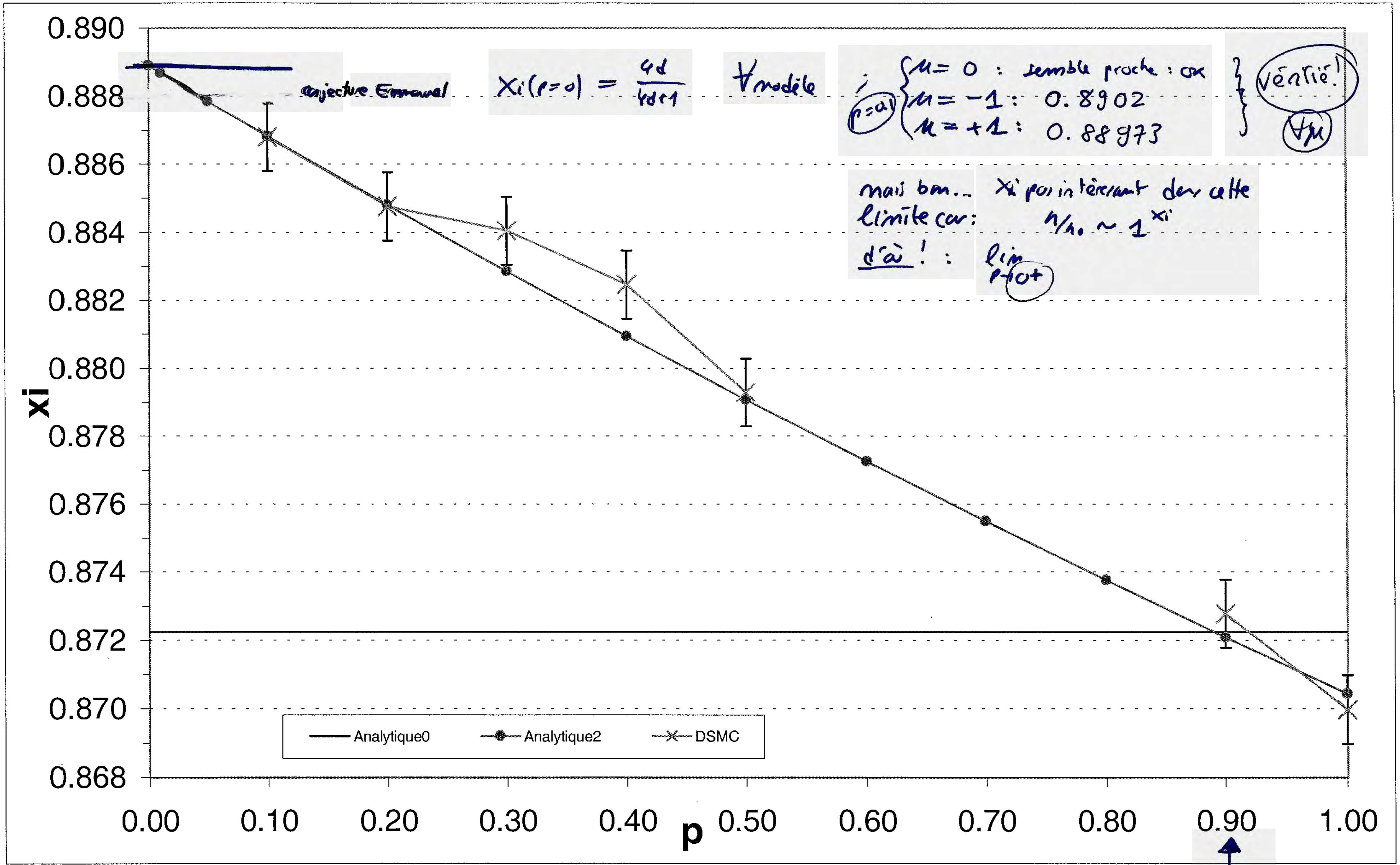
$$a_2 = -8\,\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-6-4d-\frac{1-p}{p}\sqrt{2}(d-1)} \;,$$

donc on a bien :

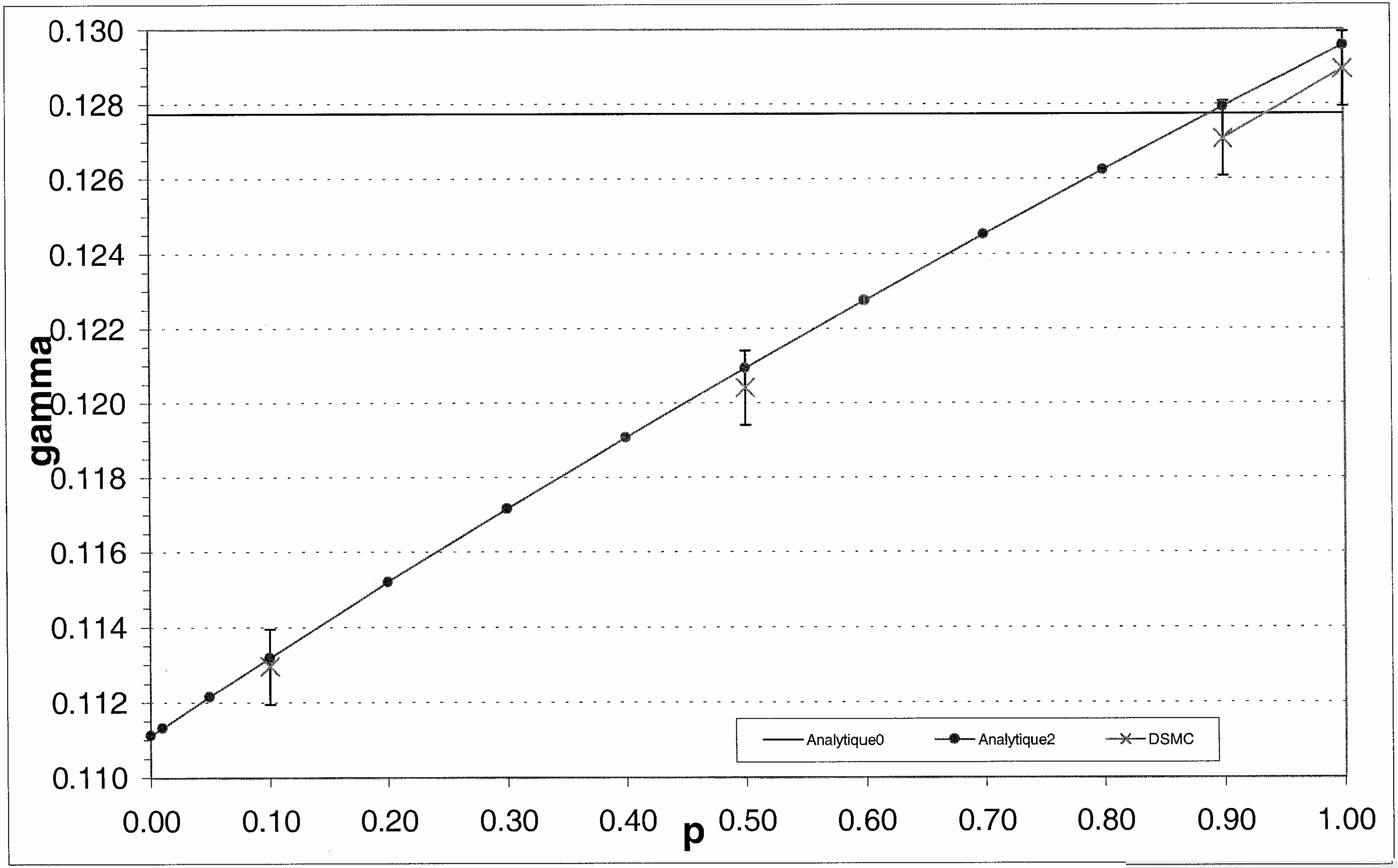
$$\lim_{p\to 0}\alpha = \alpha_0+\alpha_2\underbrace{\lim_{p\to 0}a_2}_{=0} = \alpha_0 = 1+\frac{1}{2d} \Rightarrow \xi = 4d/(4d+1) \qquad \#$$

Non : il faut vérifier avec (12)
Fait avec Mathematica : OK ✓

les autres vérifications numériques confirment tout :
- $\xi(p)$; $\gamma(p)$; $\xi+\gamma = 1 \;\forall p$
- conjecture Emmanuel : dans la limite $p\to 0^+$ tout converge vers $0.\bar{8}$ (pour $d=2$)
- les points isobestiquer n'existent clairement plus, vérifié avec $\mu = 0, 3, -3/2$
- le a_2 obtenu avec les distributions est en très bon accord !
- il semblerait que ce a_2 soit universel, ou ne dépende que TRÈS faiblement de μ.



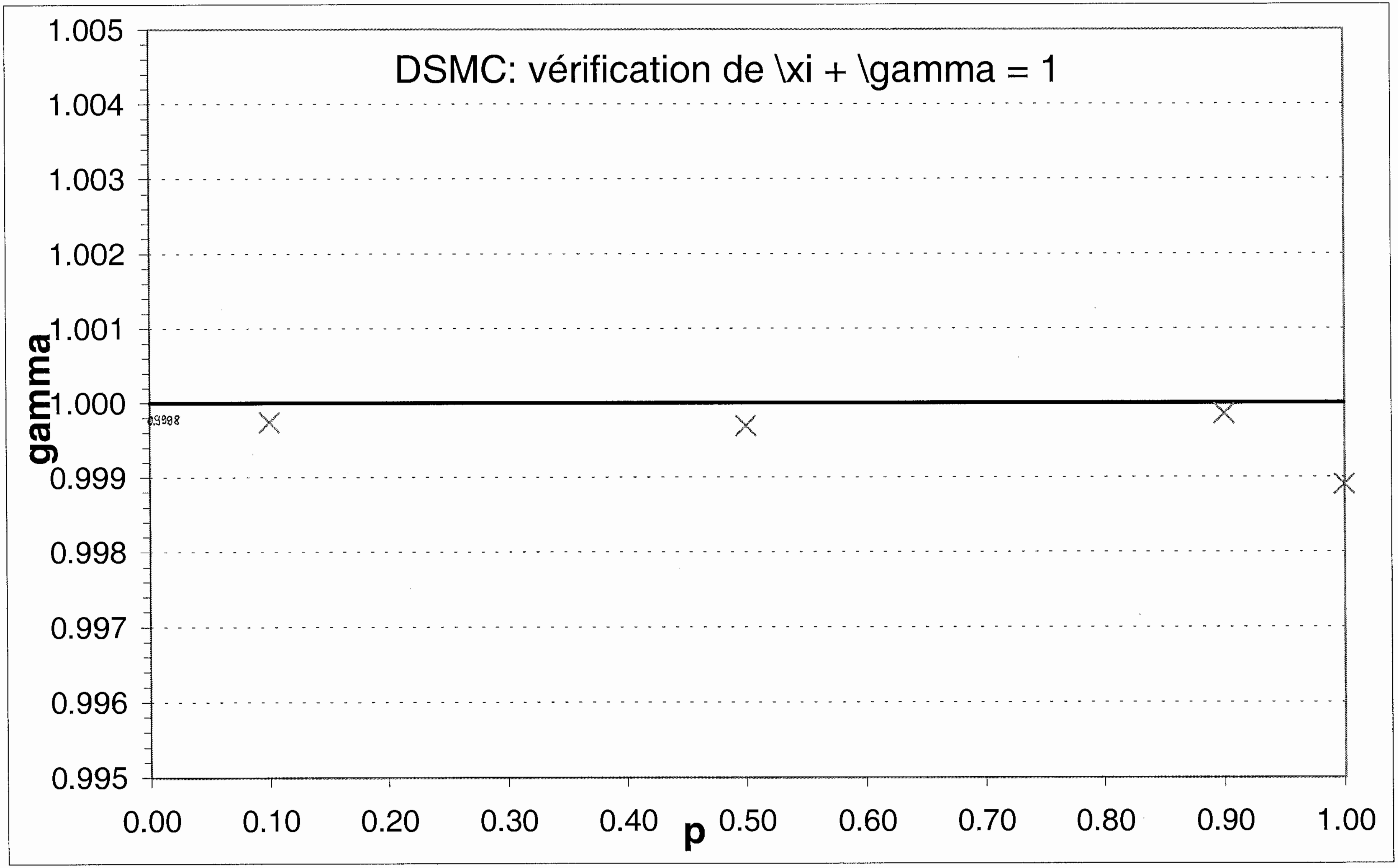
μ = 1 : 0.923
μ = −1 : 0.779



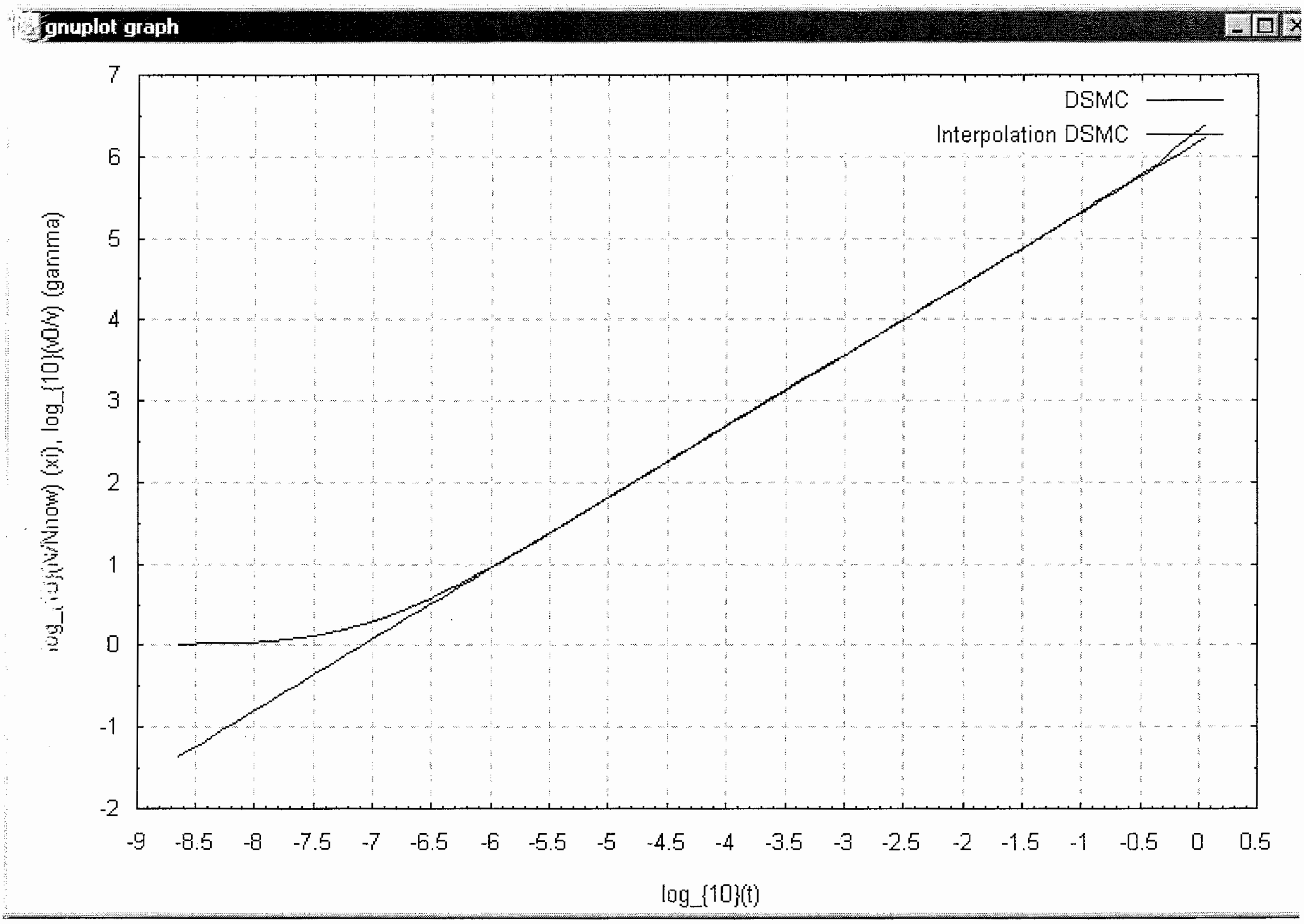
$\mu = 1 : 0.092 \Rightarrow \overset{x_i + \delta}{\sim 1}$

$\mu = -1 : 0.221 \Leftarrow$

Ae. prédit par théorie $\Rightarrow x_i + \delta = 1$


DSMC: vérification de \xi + \gamma = 1
gamma
p
1.005
1.004
1.003
1.002
1.001
1.000
0.999
0.998
0.997
0.996
0.995
0.9998
0.00
0.10
0.20
0.30
0.40
0.50
0.60
0.70
0.80
0.90
1.00

$\rho \cancel{\pi} = 0.5$



Vérifications à faire

Comme tout tend vers la distribution caractérisée par $\mu = 0$, vérifier

$$\frac{\tilde{f}(c)}{\mathcal{M}(c)} \longrightarrow 1 + \underbrace{a_2(p)}_{= a_2(p,\, d=2)} S_2(c^2)$$

pour différents \mu, y-compris $\mu = 0$.

Vérifications supplémentaires faites :

1) Exposants de déclin : ξ, γ, $\xi + \gamma = 1$ **(3 fig.)** a2ap-2a.f90, fichier Excel a2ap-2.xls
   - vrai pour : $\mu = 0$
   - vrai pour : $\mu \neq 0$ (quelques points)

2) Conjecture PRL : – vérification analytique
   – vérification numérique (quelques points) fichier Excel a2ap-2xls

3) Distributions : a) $\mu \neq 0$ $\Rightarrow$ attracté vers $\mathcal{M}(c)(1 + a_2 S_2)$; $\mu = 0$!
   a2ap-2b.f90 $\mu = 0$

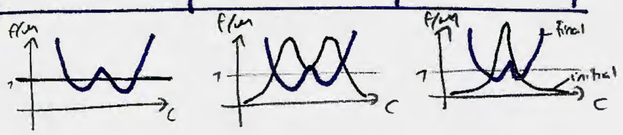
   b) Points isobestiques ne survivent pas (vérif. 20M, $\mu = 3$; $p = 0.5$) (1.Fig)
   OK ✓

Sim. Num : $\tilde{f}(c)/\mathcal{M}(c)$ pour : 20M

~~augmenter la définition retenue de l'histogramme d'un facteur 4~~

	$\mu = 0$	$\mu = 3$	$\mu = -2/3$
pas essentiel → ~~p = 0.1~~			
p = 0.5	lancé	lancé	lancé

(~~6~~ 3 Fig.)



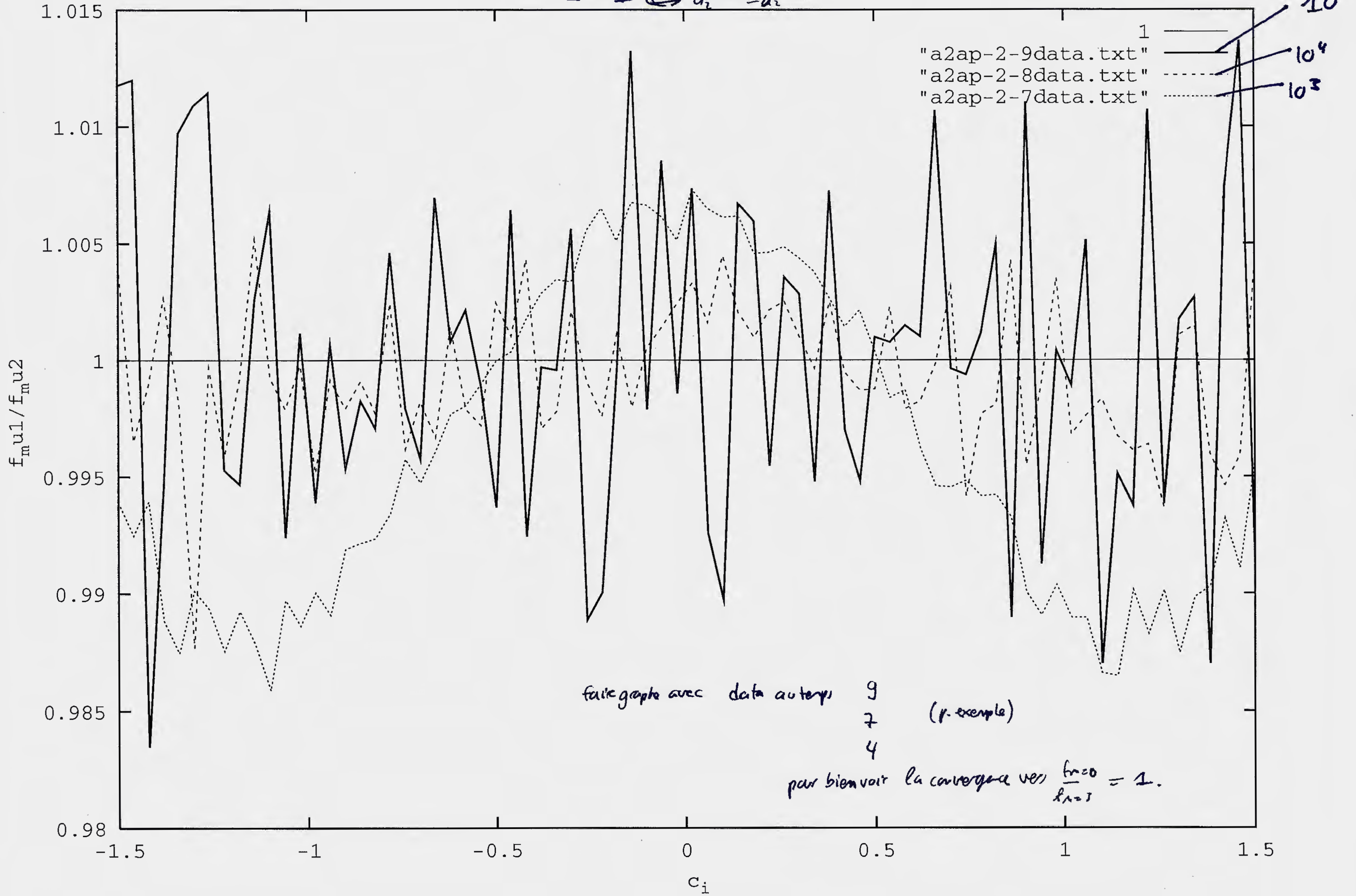
✓

A faire : une fois les calculs terminés pour $\mu = 3$ et $\mu = -2/3$, faire le plot de $f_{\mu=3}/f_{\mu=-2/3}$ pour voir si cela tend vers 1. Si c'est le cas, cela veut dire que il y a relaxation vers une distribution avec a_2 indép. de μ.

et : $\left\{ \begin{array}{l} f_{\mu=0}/f_{\mu=3} \\ f_{\mu=0}/f_{\mu=-2/3} \end{array} \right\}$ semble attiré vers a_2 indép. de μ $\Rightarrow$ universalité.
difficile de conclure, mais semble ok. ✓

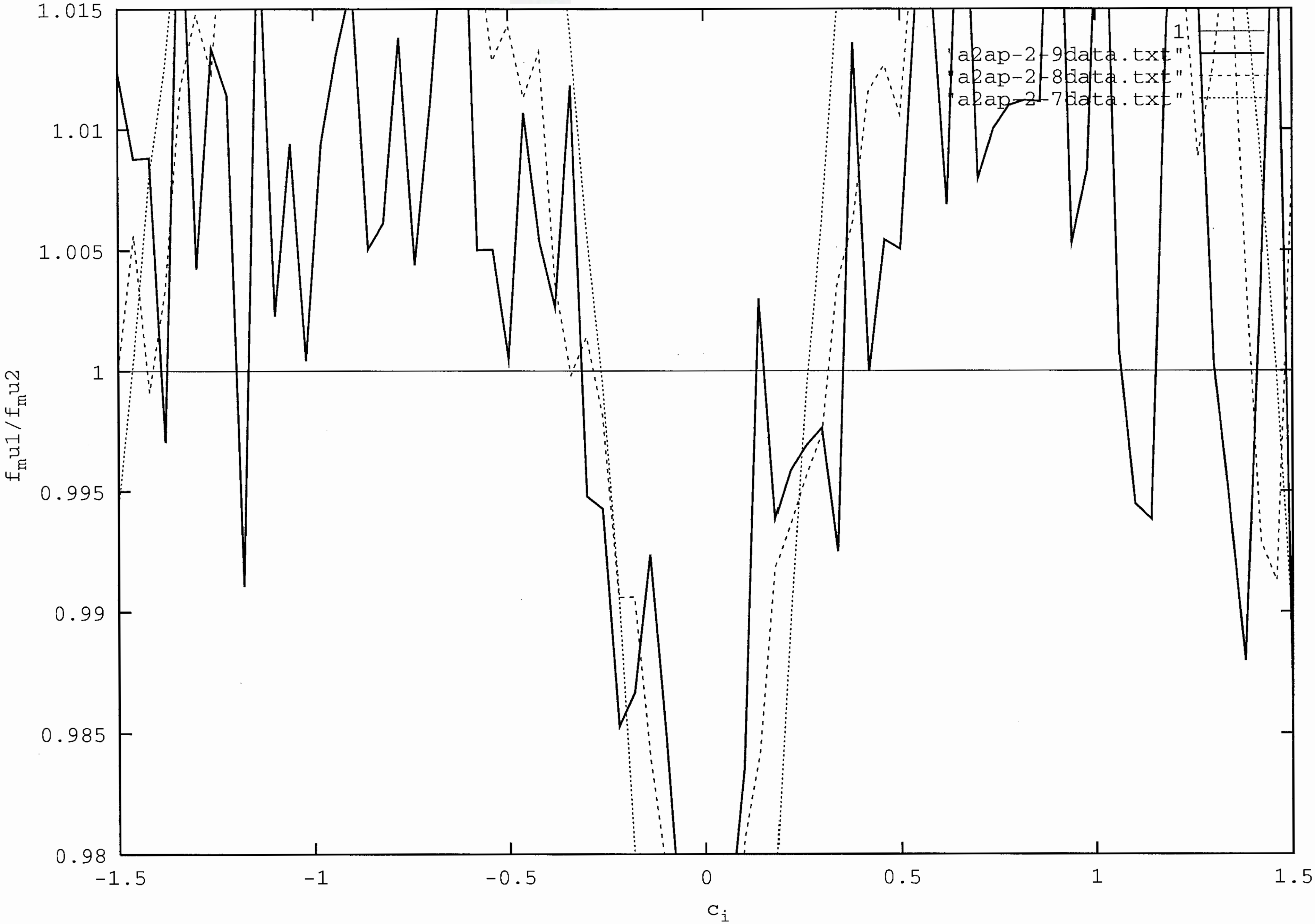
$f_{\mu=0} / f_{\mu=3} = \frac{1+a_2^{\mu=0}}{1+a_2^{\mu=3}}$ $\boxed{20M}$

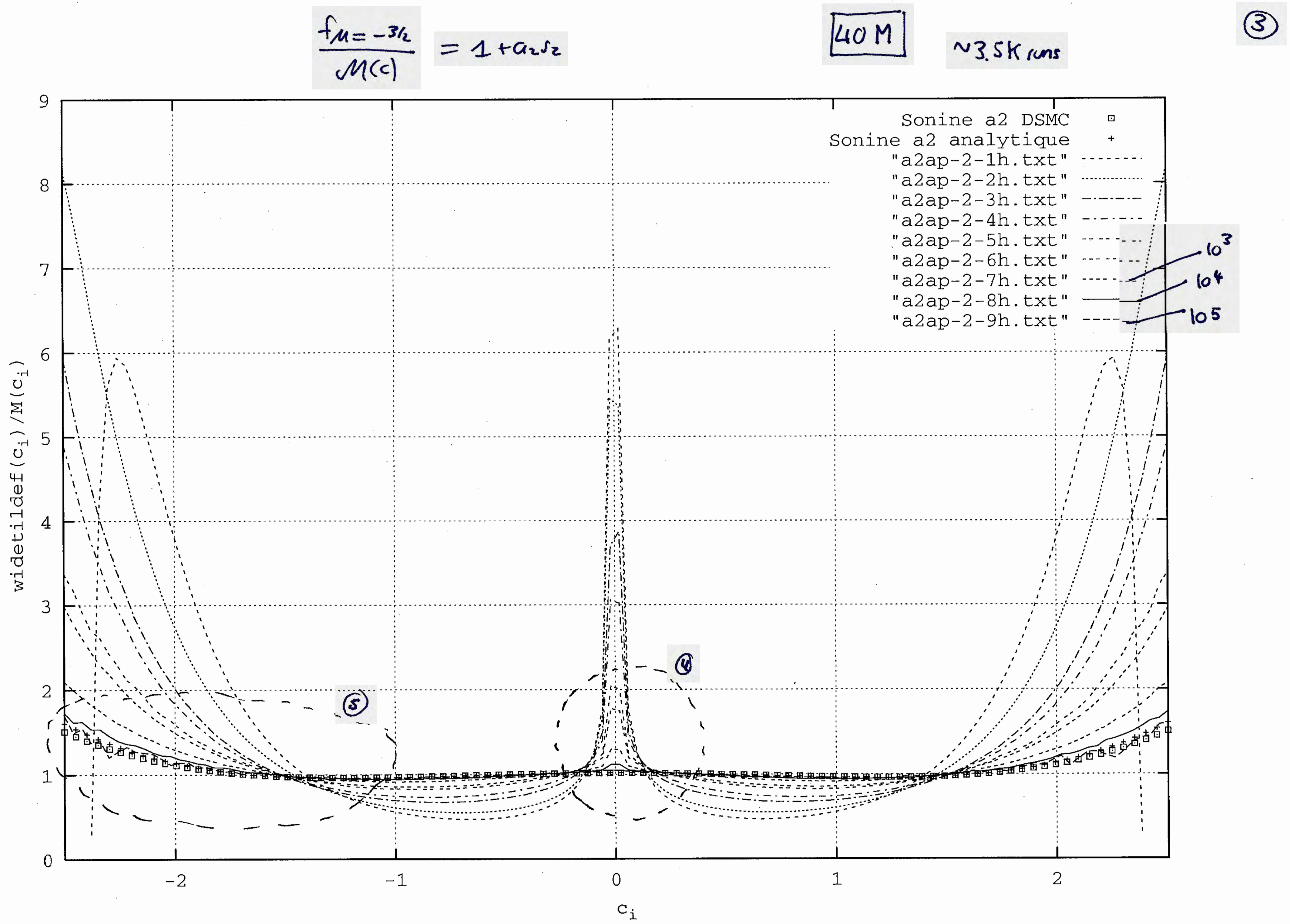
$=1 \Leftrightarrow a_2^{\mu=0} = a_2^{\mu=3}$



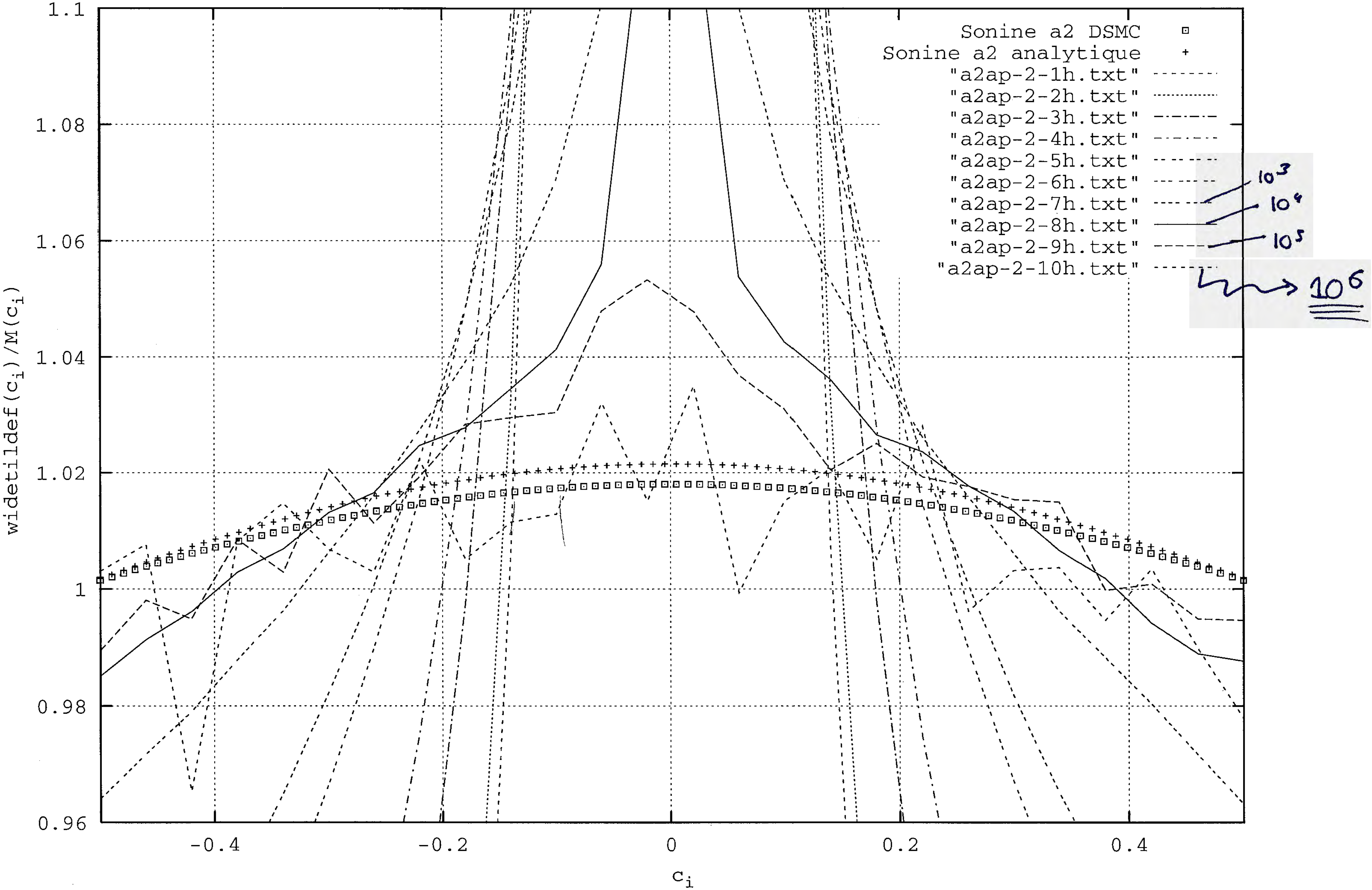
②

$f_{M=0} / f_{M=-3/2}$ 20M / 40M ⚠ ... cf GFX ③

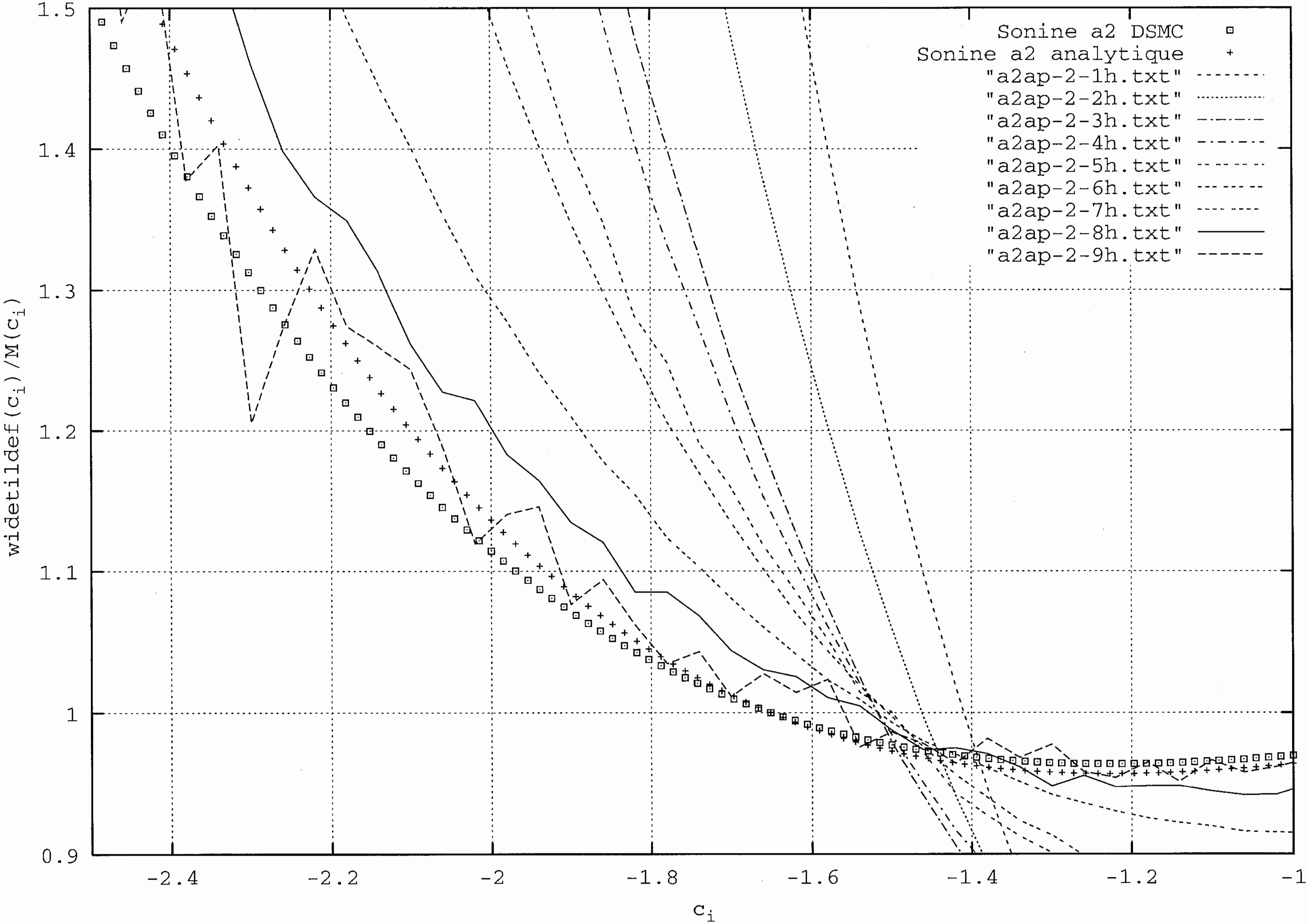



$\frac{f_{M=-3/2}}{M(c)} = 1 + a_2 S_2$
40 M
~3.5K runs
③
Sonine a2 DSMC
Sonine a2 analytique
"a2ap-2-1h.txt"
"a2ap-2-2h.txt"
"a2ap-2-3h.txt"
"a2ap-2-4h.txt"
"a2ap-2-5h.txt"
"a2ap-2-6h.txt"
"a2ap-2-7h.txt"
"a2ap-2-8h.txt"
"a2ap-2-9h.txt"
10^3
10^4
10^5
④
⑤
widetildef(c_i)/M(c_i)
c_i
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
-2
-1
0
1
2

④



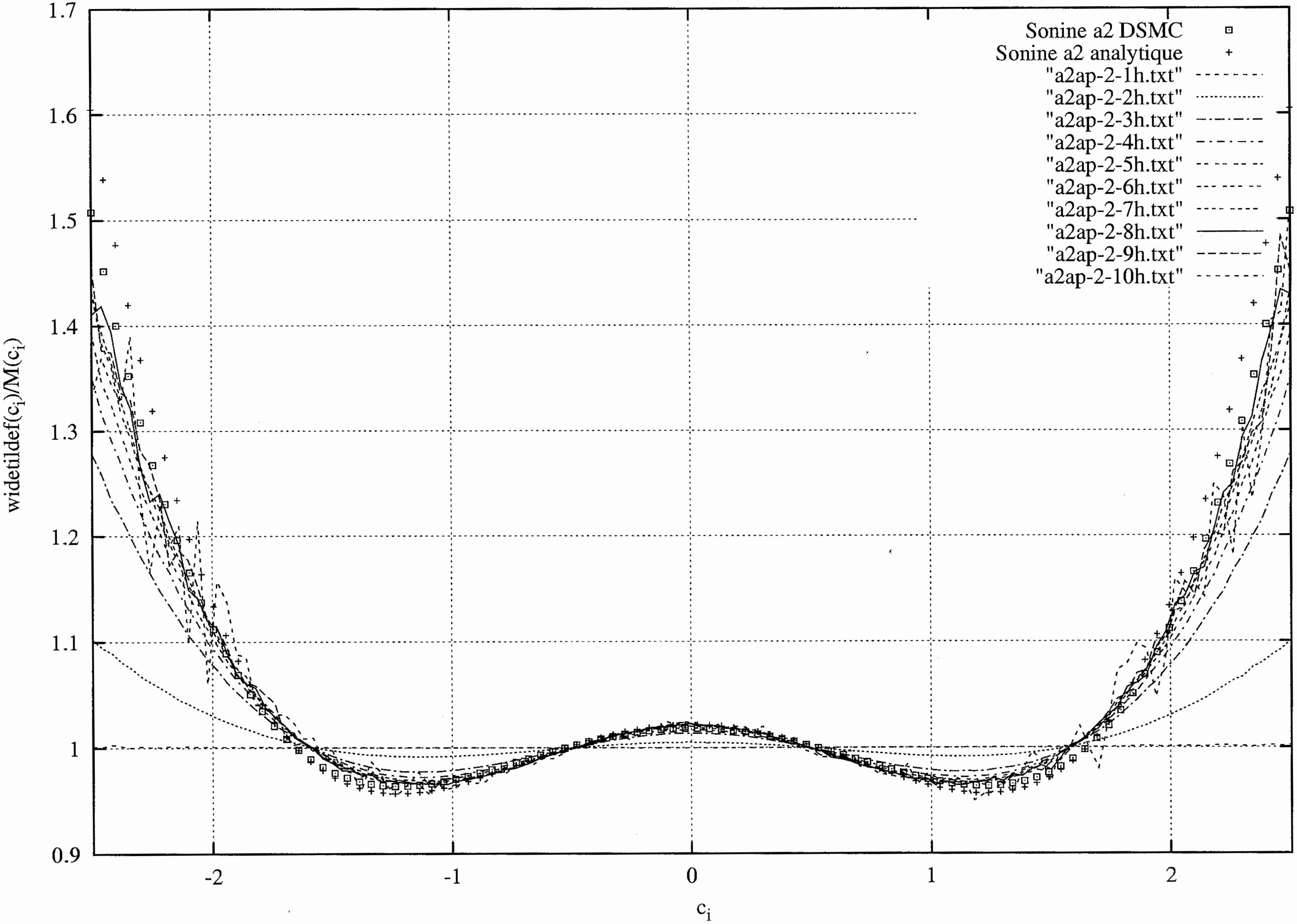
Sonine a2 DSMC
Sonine a2 analytique
"a2ap-2-1h.txt"
"a2ap-2-2h.txt"
"a2ap-2-3h.txt"
"a2ap-2-4h.txt"
"a2ap-2-5h.txt"
"a2ap-2-6h.txt"
"a2ap-2-7h.txt"
"a2ap-2-8h.txt"
"a2ap-2-9h.txt"
"a2ap-2-10h.txt"
10^3
10^4
10^5
10^6
widetildef(c_i)/M(c_i)
c_i
1.1
1.08
1.06
1.04
1.02
1
0.98
0.96
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4



1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0.9
widetildef(c_i)/M(c_i)
-2.4
-2.2
-2
-1.8
-1.6
-1.4
-1.2
-1
c_i
Sonine a2 DSMC
Sonine a2 analytique
"a2ap-2-1h.txt"
"a2ap-2-2h.txt"
"a2ap-2-3h.txt"
"a2ap-2-4h.txt"
"a2ap-2-5h.txt"
"a2ap-2-6h.txt"
"a2ap-2-7h.txt"
"a2ap-2-8h.txt"
"a2ap-2-9h.txt"

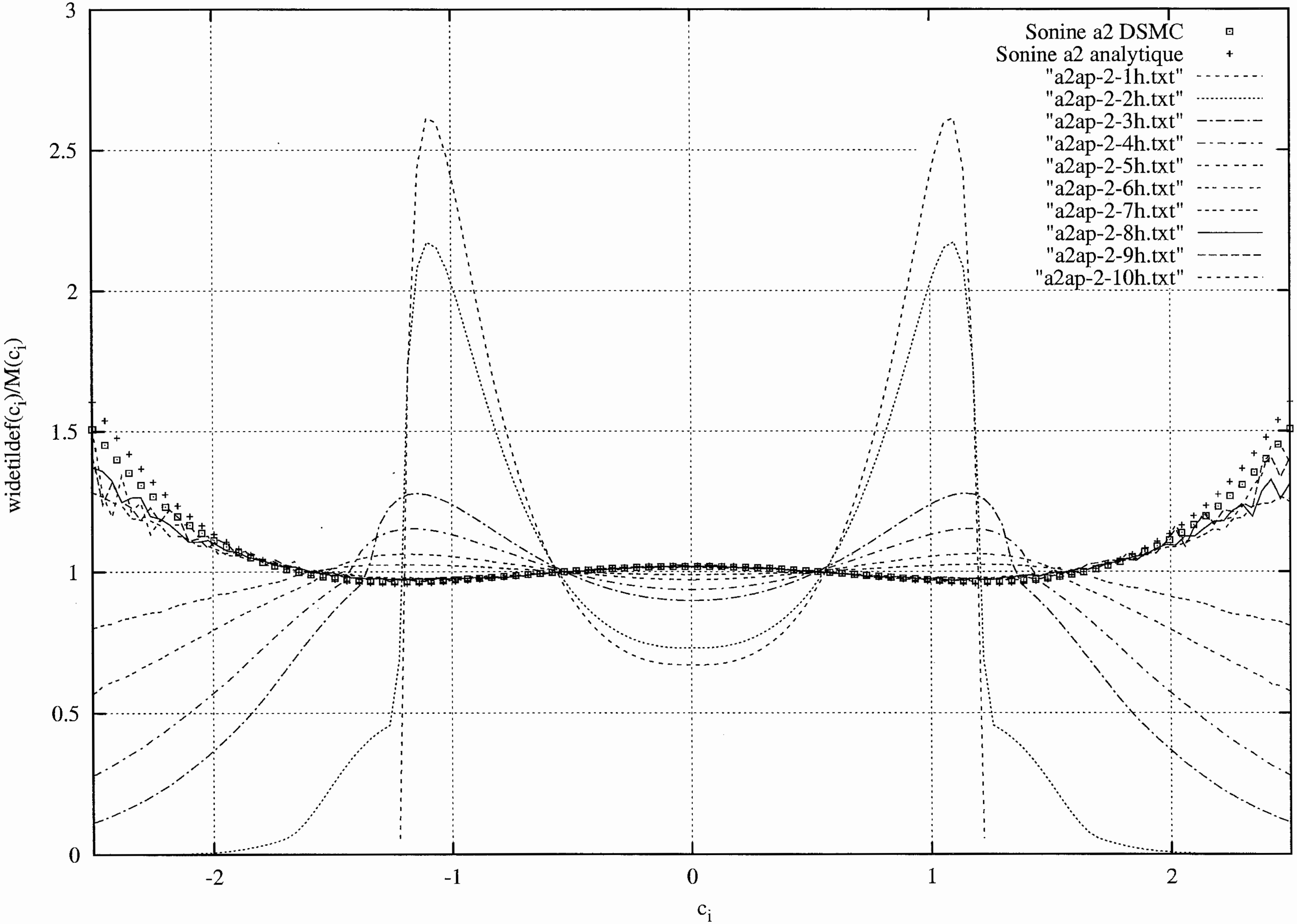
$\frac{f_{n=0}}{M(c)}$

premiers calculs

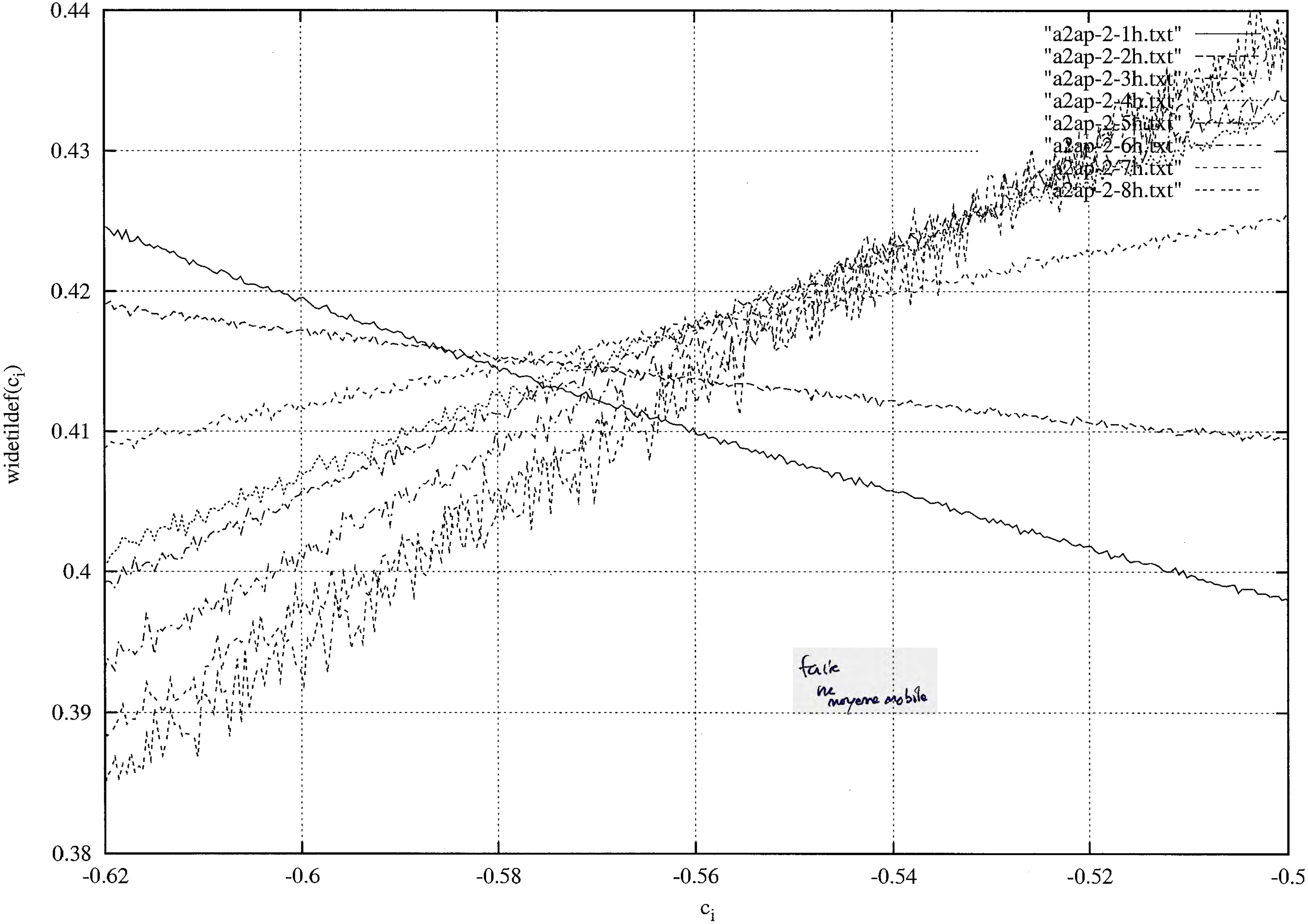


$$\frac{f_{m=3}}{M(c)}$$

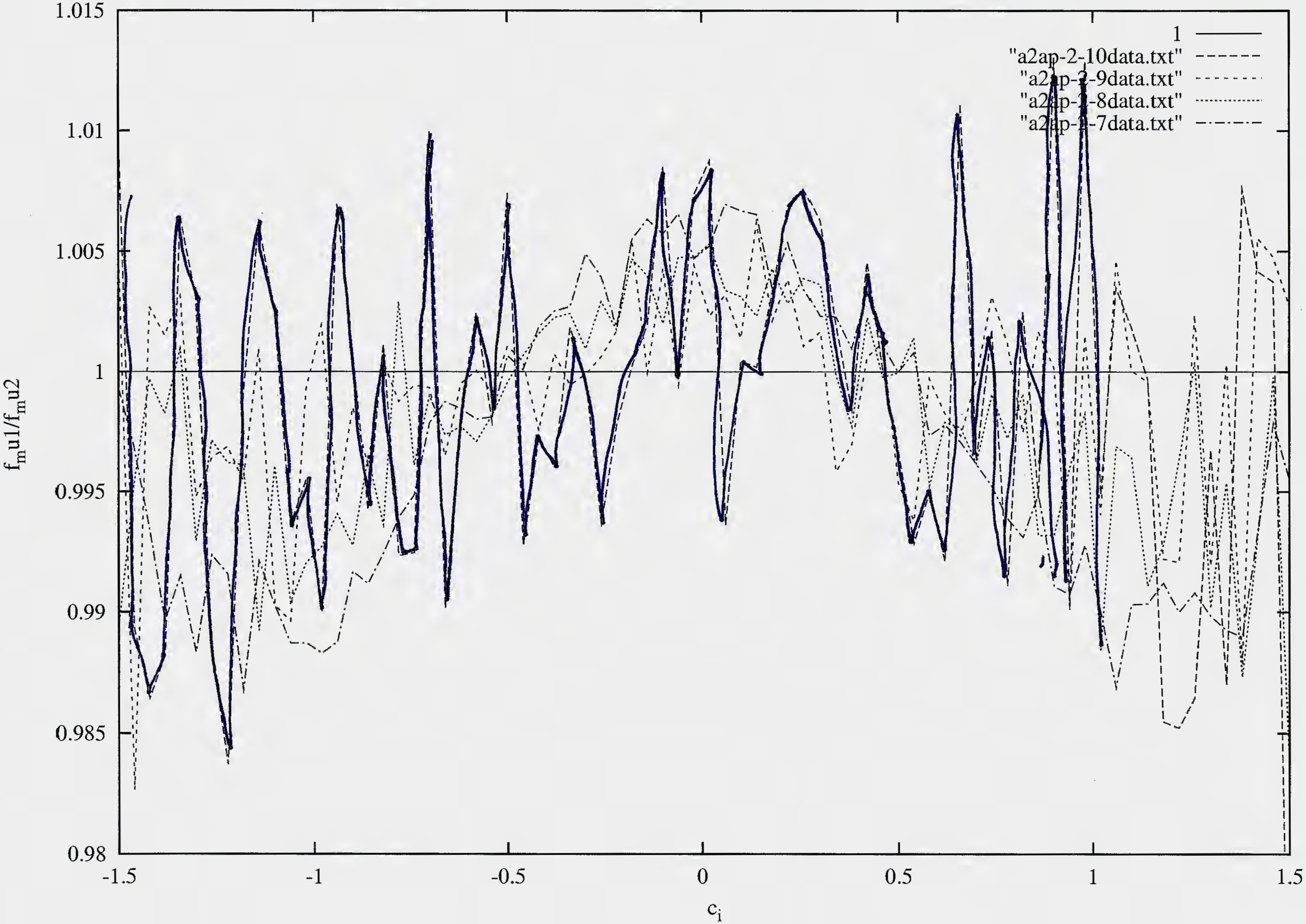
premiers calculs



∃ Identique ? NON!



$\frac{f_{m=0}}{f_{m=3}}$ vieux.

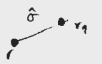


VIEILLES NOTES
OBSOLETE

$(\partial_t + v\nabla) f(r,v,t) = J[f,f] = \sigma^2 \int dv_1 \int d\hat\sigma\, \theta(g\hat\sigma)\, g\hat\sigma \left(\frac{1}{\alpha^2} b^{-1} - 1\right) f(r,v,t) f(r,v_1,t)$ hyp: collision si m. positions pour les 2 particules

avec: $\int dv_1 \int dv_2 \int d\hat\sigma\, \theta(\hat\sigma g)\, \hat\sigma \cdot g\, f(r,v_1,t) f(r,v_2,t)$ = taux de collisions

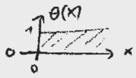
↳ interprétation: $\partial_t f = -\int dv_1 \ldots f(r,v,t) f(r,v_1,t)$: toutes les collisions t.q. 2 particules ont ensuite une vitesse différente ≠ annihilation balistique

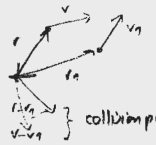


$g = v - v_1$

$\hat\sigma = \frac{r - r_1}{|r - r_1|}$

$g\cdot\hat\sigma = \frac{1}{|r-r_1|}(r - r_1)\cdot(v - v_1)$

$\theta(g\cdot\hat\sigma)$  $= \begin{cases} 1 & g\cdot\hat\sigma > 0 \\ 0 & g\cdot\hat\sigma < 0 \end{cases}$



collision possible $\Rightarrow \theta = 1$

interprétation de ce terme:
terme qui "augmente" $f(r,v,t)$: ie toutes les collisions qui entraînent et qui sont t.q. la vitesse finale est v. A changer pour l'annihilation:
$1,2 \to 3 + 4$ p.ex. $v_3 = \ldots 0$ $v_4 = \ldots 0$?

Définition actuelle: $b^{-1} g = g - \frac{1+\alpha}{\alpha}(g\cdot\hat\sigma)\cdot\hat\sigma$

$bg = g - (1+\alpha)(g\cdot\hat\sigma)\hat\sigma$: $bg = g'$: après la collision b: avant→après, donc b^{-1}: après→avant : reconstruction de la collision

Pour l'annihilation, les vitesses finales sont nulles, donc que mettre?

Démarche? Eqn. Boltz, introduire la distribution réduite et obtenir les éqn. de taux → $\omega(t), \kappa \to n(t)$. Déjà été fait dans le cas de l'annihilation pure

$$\partial_t f_1(v,t) = -\sigma^{d-1}\int dv_2 \int d\hat\sigma\, \theta(-\hat\sigma\, \hat v_{12})\, (\hat\sigma\cdot\hat v_{12})\cdot|v_{12}|\, f_1(v_2,t) f_1(v,t)$$

$\theta(-x) =$  $= 1 - \theta(x)$

$$= -\sigma^{d-1}\int dv_2 \int d\hat\sigma\, (1 - \theta(\hat\sigma\, \hat v_{12}))\, (\hat\sigma\cdot v_{12})\, f_1(v_2,t) f_1(v,t)$$

≡ intégrales sur les configurations de pré-collision, signe indiquant l'annihilation et donc la décroissance de f_1

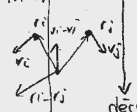
Interprétation:

$T^v(i,j) = \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, \underline{(\hat\sigma\cdot v_{ij})}\, \underline{\theta(-\hat\sigma\cdot v_{ij})}\, \underline{\delta(r_{ij} - \sigma\hat\sigma)}$, $\hat\sigma = r_{ij}/|r_{ij}|$: opérateur de collision certaine

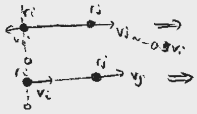
$\frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|}(v_i - v_j)$

$|r_i - r_j| = \sigma$ et de plus

$\hat\sigma = \frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|} \Rightarrow \delta(r_{ij} - \sigma\hat\sigma) \equiv$ collision.



$\theta(\hat\sigma\cdot v_{ij})$. exemple: $d = 1$:



$\Rightarrow r_i - r_j = \hat\sigma$, $v_i - v_j = 1.5\, v_i \Rightarrow \theta(\hat\sigma\cdot v_{ij}) = \theta(-\delta) = 0$: ∄ coll ← Pas bon exemple

$\Rightarrow r_i - r_j = -r_j$, $\begin{cases} v_i < v_j \Rightarrow v_i - v_j < 0 \Rightarrow \theta(\hat\sigma\cdot v_{ij}) = \theta(+\delta) \Rightarrow \theta(-\hat\sigma v_{ij}) = 0 \\ v_i > v_j \Rightarrow v_i - v_j > 0 \Rightarrow \theta(-\underset{<0}{\hat\sigma}\cdot \underset{>0}{v_{ij}}) = \theta(+\delta) = 1 \text{ : collision} \end{cases}$

décrit si une collision peut être réalisée pour une configuration donnée de v_i, v_j, r_i, r_j:

$-\hat\sigma\cdot v_{ij} > 0$: ∃ collision

$-\hat\sigma\cdot v_{ij} < 0$: ∄ collision

$\hat\sigma\cdot v_{ij} > 0$: ∄ collision: $T^v(i,j) > 0$: $\partial_t f$ augmente si ∄ annihilation

$\hat\sigma\cdot v_{ij} < 0$: ∃ collision: $T^v(i,j) < 0$: $\partial_t f$ diminue si ∃ annihilation

Limite de Grad: reformulation de l'opérateur de collision. Ok. Pas nécessaire d'aller si loin.

Annihilation balistique: p = proba. d'annihilation

$\lim_{p\to 1} n(t)$ doit redonner les coefficients de l'article.

$\lim_{p\to 0^+} n(t)\ldots \to$ limite intéressante et délicate à prendre.

Equation d'annihilation pure: $(\partial_t + v_1\partial_{r_1}) f(1,t) = \int d2\, T^v(1,2)\, f(1,t)\, f(2,t)$, $di = dr_i\, dv_i$

$T^v(i,j) = \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\cdot v_{ij})\, \underline{\theta(-\hat\sigma\cdot v_{ij})}\, \delta(r_{ij} - \sigma\hat\sigma)$, $\hat\sigma = r_{ij}/|r_{ij}|$ $\theta(x)$

c'est ce terme qui dit s'il y a eu une collision ou pas... à modifier
- si ∄ coll. ok: change rien
- si $(\hat\sigma v_{ij}) > 0$, alors avec proba. p on a $T^v(i,j)$
$(1-p)$ on a l'équivalent de $(+\hat\sigma\, v_{ij})$

$T^v(i,j) \to \underbrace{p\, \overset{\text{connu}}{T^v(i,j)}}_{\text{annihilation}} + (1-p)\, \overset{\text{plus ou moins connu}}{T_c^v(i,j)}$

collision without annihilation
choc élastique? on va dire NON: $\alpha = 1$

$T_c^v(i,j) = \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\cdot v_{ij})\, \theta(-\hat\sigma\cdot v_{ij})\, \delta(r_{ij} - \sigma\hat\sigma)\, (b^{-1} - 1)$; $b v_{ij} = v_{ij} - 2(v_{ij}\hat\sigma)\hat\sigma$
$b^{-1} v_{ij} = v_{ij} + 2(v_{ij}\hat\sigma)\hat\sigma$

$\Rightarrow T^v(i,j) = \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\cdot v_{ij})\, \theta(-\hat\sigma\cdot v_{ij})\, \delta(r_{ij} - \sigma\hat\sigma)\, \underbrace{\left(\cancel{p} + b^{-1} - 1 - p b^{-1} - \cancel{p}\right)}_{= (1-p)b^{-1} - 1}$: peut-être garder la même forme séparée

Chgt. de variables: $\underline{c} = \underline{v}/\bar v$; $\bar v = \sqrt{\langle v^2\rangle}$; $\underline{x} = \underline{r}/\lambda$; $\langle v^2\rangle = n(t)^{-1}\int dv\, v^2 f(v,t)$

$f_1(v,t) = \frac{n(t)}{\bar v(t)^d}\tilde f_1(c)$; $\tilde f_1(c) = \tilde f_1(v/\bar v)$: indépendant du temps

Refaire le passage de l'éq. de Boltzmann:

$(\partial_t + \cancel{v_1\partial_{r_1}}) f(r_1, v_1, t) = \int dr_2 dv_2\, T^v(1,2)\, f(r_1, v_1, t)\, f(r_2, v_2, t)$

$= \int dr_2\, dv_2\, \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\, v_{ij})\, \theta(-\hat\sigma\, v_{ij})\, \delta(r_{ij} - \sigma\hat\sigma)\, f\ldots f\ldots$; $\hat\sigma = r_{ij}/|r_{ij}|$

$= \int dv_2\, \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\, v_{ij})\, \theta(-\hat\sigma\, v_{ij})\, f(v_1,t)\, f(v_2,t)\, \underbrace{\int dr_2\, \delta(r_{ij} - \sigma\hat\sigma)}_{r_1 = r_2 \text{ ds limite Grad } \sigma\to 0}$

$\Rightarrow \partial_t f(v_1,t) = \underbrace{\sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\cdot v_{12})\, \theta(-\hat\sigma\, v_{12})\int dv_2\, f(v_2,t)}_{\nu(v,t)} \cdot f(v_1,t)$

$\Rightarrow \partial_t f_1(v,t) = -\nu(v,t)\, f_1(v,t)$

$\lim_{v\to 0}\nu(v,t) = \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, \lim_{v\to 0}(\hat\sigma\cdot v_{12})\, \theta(-\hat\sigma\cdot v_{12})\int dv_2\, \lim_{v\to 0}|v_{12}|\, f_1(v_2,t)$

Problème: $\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1\frac{\partial}{\partial r_1}\right) f(1,t) = \int d2\, T^v(1,2)\, f(1,t)\, f(2,t)$; $T^v(1,2) = \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\cdot v_{12})\, \theta(-\hat\sigma\cdot v_{12})\, \delta(r_{12} - \sigma\cdot\hat\sigma)$, $r_{12} = r_1 - r_2$

Hyp: $f(1,t) = f(r_1, v_1, t) = f(v_1,t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} f(v_1,t) = \int dr_2 \int dv_2\, \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\, v_{12})\, \theta(-\hat\sigma\, v_{12})\, \delta(r_1 - r_2 - \sigma\cdot\hat\sigma)\, f(v_1,t)\, f(v_2,t)$

$= \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma \int_{dv_2\, dr_2} (\hat\sigma\cdot v_{12})\, \theta(-\hat\sigma\cdot v_{12})\, f(v_1,t)\, f(v_2,t)\, \delta\left(r_1 - r_2 - \sigma\cdot\frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}\right)$

$= \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma \int dv_2 \int dr_2\, (\hat\sigma\cdot\hat v_{12})\, \theta(-\hat\sigma\cdot v_{12})\, |v_{12}|\, f(v_1,t)\, f(v_2,t)\, \delta\left(r_1 - r_2 - \sigma\frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}\right)$

$\hat= \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma \int dv_2 \int dr_2\, (\hat\sigma\cdot\hat v_{12})\, \theta(-\hat\sigma\cdot v_{12})\, |v_{12}|\, \delta\left(r_1 - r_2 - \sigma\frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}\right) f(v_2,t)\cdot f(v_1,t)$

$= -\nu(v_1,t)\, f(v_1,t)$

$\nu(v_1,t) = -\sigma^{d-1}\int d\hat\sigma \int dv_2 \int dr_2\, (\hat\sigma\cdot\hat v_{12})\, \theta(-\hat\sigma\cdot\hat v_{12})\, |v_{12}|\, \delta\Big(r_1 - r_2 - \sigma\underbrace{\frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}}_{=\hat\sigma}\Big)\, f_1(v_2,t) \overset{?}{=} \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\cdot\hat v_{12})\, \theta(-\hat\sigma\, \hat v_{12})\int dv_2\, |v_{12}|\, f_1(v_2,t)$

cf. page ②

Dérivation de l'équation de Boltzmann :

(3)

$$(\partial_t + \cancel{v_1\partial_{r_1}}^{\,0})\, f(1,t) = \int d2\, \left(p\, T^{\vee}(ij) + (1-p)\, T_c^{\vee}(ij)\right) f(1,t)\, f(2,t)$$

$$= \underbrace{p\int dr_2\, dv_2\, \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\cdot v_{ij})\, \theta(-\hat\sigma v_{ij})\, \delta(r_{ij}-\sigma\hat\sigma)\, f(r_1 v_1,t)\, f(r_2,v_2,t)}_{\text{connu}} \ \ldots$$

$$+\underbrace{(1-p)\int d2\, T_c^{\vee}(ij)\, f(1,t)\, f(2,t)}$$

$$= (1-p)\int dr_2\int dv_2\, \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma v_{ij})\, \theta(-\hat\sigma v_{ij})\, \delta(r_{ij}-\sigma\hat\sigma)\, (\underbrace{b^{-1}}_{\text{difficile}} - \underbrace{1}_{\text{ce terme est connu}})\, f(r_1,v_1,t)\, f(r_2,v_2,t)$$

$v_1 \to r_1$, $r_2 \to r_1+\sigma$

$$= p\,\sigma^{d-1}\int dv_2\int dr_2\int d\hat\sigma\, \underbrace{(\hat\sigma v_{ij})}_{=(\hat\sigma\hat v_{ij})\cdot|v_{ij}|}\, \theta(-\hat\sigma v_{ij})\, \delta(r_{ij}-\sigma\hat\sigma)\, f(r_1,v_1,t)\, f(r_2,v_2,t) + (1-p)\cdots$$

$$= p\,\sigma^{d-1} f(r_1,v_1,t)\int dv_2\int d\hat\sigma\, \underbrace{(\hat\sigma\cdot\hat v_{ij})}_{\text{isotrope : dépend pas de } v_{ij}}\, |v_{ij}|\, \underbrace{f(r_1+\sigma,v_1,t)}_{\text{homogène : } = f(v_1,t)}\, \underbrace{\theta(-\hat\sigma v_{ij})}_{=\theta(-\hat\sigma\cdot\hat v_{ij})} + (1-p)\cdots$$

$$= p\,\sigma^{d-1} f(v_1,t)\left(\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\cdot\hat v_{ij})\, \theta(-\hat\sigma\cdot\hat v_{ij})\right)\int dv_2\, |v_{12}|\, f(v_2,t) + (1-p)\cdots$$

$\hat\sigma \to -\hat\sigma$

$$= \underbrace{-p\left(\underbrace{\left[\sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\cdot\hat v_{12})\, \theta(+\hat\sigma\hat v_{12})\right]}_{\text{constante } C}\int dv_2\, |v_{12}|\, f(v_2,t)\right)}_{:= +\nu(v_1,t)}\cdot f(v_1,t) + (1-p)\cdots$$

$$= -p\cdot\nu(v_1,t)\, f(v_1,t) + (1-p)\underbrace{\int dr_2\int dv_2\, \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma v_{ij})\, \theta(-\hat\sigma v_{ij})\, \delta(r_{ij}-\sigma\hat\sigma)\, (b^{-1}-1)\, f(r_1,v_1,t)\, f(r_2,v_2,t)}_{\text{terme compliqué : cf. van Noije } := I_c}$$

avec : action de b^{-1} : $v_1 \to v_1' = v_1 - (v_{12}\hat\sigma)\hat\sigma$
$v_2 \to v_2' = v_2 + (v_{12}\hat\sigma)\hat\sigma$

$$I_c = \int dr_2\int dv_2\, \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma v_{ij})\, \theta(-\hat\sigma v_{ij})\, \delta(r_{ij}-\sigma\hat\sigma)\, (b^{-1}-1)\, f(r_1,v_1,t)\, f(r_2,v_2,t) \quad , i=1,\ j=2$$

$$\stackrel{\text{hom.}}{=} \sigma^{d-1}\int dv_2\int d\hat\sigma\, \overbrace{\theta(-\hat\sigma v_{ij})}^{\text{isotrope}}\, (\hat\sigma\cdot v_{ij})\, (b^{-1}-1)\, f(v_1,t)\, f(v_2,t)$$

$$= \sigma^{d-1}\int dv_2\int d\hat\sigma\, \theta(-\hat\sigma\hat v_{ij})\, (\hat\sigma\cdot v_{ij})\, \left(f(v_1',t)\, f(v_2',t) - f(v_1,t)\, f(v_2,t)\right)$$

Résumé :

$$\begin{cases} \partial_t f(v_1,t) = -p\cdot\nu(v_1,t)\, f(v_1,t) + (1-p)\, I_c \\ \nu(v_1,t) = +\sigma^{d-1}\underbrace{\left(\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\hat v_{12})\, \theta(+\hat\sigma\hat v_{12})\right)}_{=C}\int dv_2\, |v_{12}|\, f(v_1,t) \\ I_c = \sigma^{d-1}\int dv_2\int d\hat\sigma\, \theta(-\hat\sigma\hat v_{ij})\, (\hat\sigma\cdot v_{ij})\, \left(f(v_1',t)\, f(v_2',t) - f(v_1,t)\, f(v_2,t)\right) \end{cases}$$

$v_1' = v_1 - (v_{12}\hat\sigma)\hat\sigma$; $v_2' = v_2 + (v_{12}\hat\sigma)\hat\sigma$

$\boxed{\text{voir (3b)}}$

Avec :

$c = v/v_0$, $x = r/\lambda$, $v_0 = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \left(\frac{1}{n(t)}\int dv\, v^2 f(v,t)\right)^{1/2}$, ansatz : $\boxed{f(v,t) = n(t)/v_0^d(t)\, \tilde f(v/v_0)}$ SCALING : Hypothèse !

$\Rightarrow$

• $$\partial_t f(v_1,t) = \partial_t n(t)\, \frac{1}{v_0^d}\, \tilde f(c) - \frac{1}{v_0}\frac{dv_0}{dt}\left(d\cdot n\cdot\tilde f + n\cdot c\cdot\frac{d\tilde f}{dc}\right)\cdot\frac{1}{v_0^d} = \frac{n}{v_0^d}\left[\frac{1}{n}\partial_t n\, \tilde f - \frac{1}{v_0}\frac{dv_0}{dt}\left(d\cdot\tilde f + c\frac{d\tilde f}{dc}\right)\right]$$

• $$\nu(v_1,t)\cdot f(v_1,t) = -\sigma^{d-1}\int dv_2\, |v_{12}|\, f(v_2,t)\underbrace{\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma\cdot\hat v_{12})\, \theta(+\hat\sigma\cdot\hat v_{12})}_{:= C(d) \text{ (dépend de la dim)}}\cdot f(v_1,t) = -\sigma^{d-1} C(d)\int dv_2\, |v_{12}|\, f(v_2,t)\cdot f(v_1,t)$$

$$= -\sigma^{d-1} C(d)\int dc_2\, v_0^d v_0\, |c_{12}|\cdot\frac{n}{v_0^d}\, f(c_2)\, \frac{n}{v_0^d}\, f(c_1)$$

$$= -\sigma^{d-1} C(d)\int dc_2\, |c_{12}|\, f(c_2)\, f(c_1) \qquad \left.\frac{\cancel{v_0^d}\, v_0\, n^2}{\cancel{v_0^d}\, v_0^d}\right\} = \frac{n^2}{v_0^{d-1}}$$

$$= -\sigma^{d-1}\frac{n^2}{v_0^{d-1}}\, C(d)\int dc_2\, |c_{12}|\, f(c_2)\, f(c_1)$$

• $$I_c = \sigma^{d-1}\int dv_2\int d\hat\sigma\, \theta(-\hat\sigma v_{ij})\, (\hat\sigma\cdot v_{ij})\, \left(f(v_1',t)\, f(v_2',t) - f(v_1,t)\, f(v_2,t)\right)$$

$$= \sigma^{d-1}\int dc_2\, v_0^d\int d\hat\sigma\, \theta(-\hat\sigma\cdot v_{ij})\, (\hat\sigma\cdot\hat v_{ij})\, \underbrace{|v_{ij}|}_{=v_0|c_{ij}|}\left(\frac{n}{v_0^d}\tilde f(c_1')\, \frac{n}{v_0^d}\tilde f(c_2') - \frac{n}{v_0^d} f(c_1)\, \frac{n}{v_0^d} f(c_2)\right)$$

$$= \sigma^{d-1}\, v_0^d\, v_0\, \frac{n^2}{v_0^{2d}}\int dc_2\int d\hat\sigma\, \theta(-\hat\sigma\cdot v_{ij})\, (\hat\sigma\cdot\hat v_{ij})\, |c_{ij}|\, \left(\tilde f(c_1')\, \tilde f(c_2') - f(c_1)\, f(c_2)\right)$$

$$= \sigma^{d-1}\frac{n^2}{v_0^{d-1}}\int dc_2\int d\hat\sigma\, \theta(-\hat\sigma v_{ij})\, (\hat\sigma\cdot\hat v_{ij})\, |c_{ij}|\, \left(\tilde f(c_1')\, \tilde f(c_2') - f(c_1)\, f(c_2)\right) \quad ; \ c_1' = c_1'(\hat\sigma),\ c_2' = c_2'(\hat\sigma)$$

Tout ensemble :

$$\cancel{\frac{n}{v_0^d}}\left[\underbrace{\left(\frac{1}{n}\frac{dn}{dt}\right)}_{=-\beta/t\ (\text{eq. 3a})}\tilde f - \underbrace{\left(\frac{1}{v_0}\frac{dv_0}{dt}\right)}_{=\frac{\beta-\delta}{2t}\ (\text{eq. 7})}\left(d\tilde f + c\frac{d\tilde f}{dc}\right)\right] = -\underbrace{\sigma^{d-1}\cancel{\frac{n}{v_0^d}}\cdot n\cdot v_0}_{=B/t}\, C(d)\int dc_2\, |c_{12}|\, f(c_2)\, f(c_1)\cdot p$$

$$+\underbrace{\sigma^{d-1}\cancel{\frac{n}{v_0^d}}\, n\cdot v_0}_{=B/t}\int dc_2\int d\hat\sigma\, \theta(-\hat\sigma v_{ij})\, (\hat\sigma\cdot\hat v_{ij})\, |c_{ij}|\, \left(\tilde f(c_1')\, \tilde f(c_2') - f(c_1)\, f(c_2)\right)\cdot(1-p)$$

avec : • $\sigma^{d-1}\, n\cdot v_0 = \frac{B}{t}$ (par dét. des exp. critiques $\beta+\delta=1$) ↳ $n\cdot v_0 \sim t^{-\frac{2}{1-\alpha}+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \sim t^{-1}$ ($=-\beta+\gamma$)

• $\partial_t \ln(n) = -\beta/t$

• $\partial_t \ln(v_0) = (\beta-\delta)/2t$

Eqn. Boltz:

à calculer explicitement avec chgt. var.

$$\partial_t f(v_1,t) = -{}^p\sigma^{d-1}\beta_1\, f(v_1,t)\int dv_2\, |v_{12}|\, f(v_2,t) + (n-p)I_c \quad ; \ \beta_1 = \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma \cdot \hat v_{12})\, \theta(\hat\sigma\cdot\hat v_{12})$$

Ansatz:

$$f(v,t) = \frac{n(t)}{v_0(t)^d}\,\tilde f\Big(\underbrace{\vec v / v_0}_{=c}\Big) \quad ; \ v_0 = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \left(\frac{1}{n(t)}\int dv\, v^2 f(v,t)\right)^{1/2}$$

RHS: $c = v/v_0$; $dc = dv/v_0^d$

$$-\sigma^{d-1}\beta_1 f(v_1,t)\int dv_2\, |v_{12}|\, f(v_2,t) = -\sigma^{d-1}\beta_1 \int dc_2\, \cancel{v_0^d}\, v_0\, |c_{12}|\, \frac{n^2}{v_0^d}\,\frac{1}{\cancel{v_0^d}}\, \tilde f(c_1)\tilde f(c_2)$$

$$= -\sigma^{d-1}\frac{n^2}{v_0^{d-1}}\beta_1 \int dc_2\, |c_{12}|\, \tilde f(c_1)\tilde f(c_2)$$

LHS:

$$\partial_t f(v_1,t) = \partial_t\left(\frac{n(t)}{v_0(t)^d}\tilde f(c)\right) = (\partial_t n(t))\frac{1}{v_0(t)^d}\tilde f(c_1) - \frac{1}{v_0(t)^{d+1}}\, d\cdot n(t)\cdot \tilde f(c_1)\cdot\frac{dv_0(t)}{dt} + \frac{n(t)}{v_0(t)^d}\,\underbrace{\frac{\partial c}{\partial t}}\cdot\frac{\partial}{\partial c_1}\tilde f(c_1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\frac{v}{v_0} = -\frac{1}{v_0^2}\, v\,\frac{\partial}{\partial t} v_0 = -\frac{c_1}{v_0}\partial_t v_0$$

$$= \frac{n(t)}{v_0(t)^d}\left[\frac{1}{n(t)}\partial_t n(t)\,\tilde f(c_1) - \frac{1}{v_0(t)}\partial_t v_0(t)\, d\cdot\tilde f(c_1) - \frac{c}{v_0}\partial_t v_0(t)\cdot\nabla_{c_1}\tilde f(c_1)\right]$$

$$= \frac{n(t)}{v_0(t)^d}\left[\partial_t \ln(n(t)) - \partial_t \ln(v_0(t))\cdot d - \partial_t \ln(v_0(t))\, c\cdot\nabla_{c_1}\right]\tilde f(c_1)$$

$$= \frac{n(t)}{v_0(t)^d}\left[\partial_t \ln(n) - \partial_t\ln(v_0)\left\{d + c\cdot\nabla_{c_1}\right\}\right]\tilde f(c_1)$$

Het ensemble LHS = RHS:

$$\frac{\cancel{n(t)}}{v_0(t)^{\cancel{d}}}\left[\partial_t\ln(n) - \partial_t\ln(v_0)\left\{d + c\nabla_{c_1}\right\}\right]\tilde f(c_1) = -\sigma^{d-1}\frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{v_0^{d-1}}}\beta_1\int dc_2\, |c_{12}|\, \tilde f(c_1)\tilde f(c_2)$$

Or: (36) et (37) ⟹

$$\begin{cases} \ln(n) = -\xi\ln\left(1 + \frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t\right) + \ln(n_0) & \Longrightarrow \partial_t \ln(n) = -\xi\,\dfrac{\frac{1+\alpha}{2}\omega_0}{1+\frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t} \quad (*) \\ \ln(v_0) = -\gamma\ln\left(1+\frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t\right) + \ln(\bar v_0) & \Longrightarrow \partial_t\ln(v_0) = -\gamma\,\dfrac{\frac{1+\alpha}{2}\omega_0}{1+\frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t} \quad (**) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{\frac{1+\alpha}{2}\omega_0}{1+\frac{1+\alpha}{2}\omega_0\cdot t}\left[-\xi + \gamma(d + c\nabla_{c_1})\right]\tilde f(c_1) = -\sigma^{d-1} n(t) v_0(t)\,\beta_1\int dc_2\, |c_{12}|\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2)$$

Avec: (36) et (37) ⟹

$$n(t)\cdot v_0(t) = n_0\cdot\bar v_0\left(1+\frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t\right)^{-(\xi+\gamma)} = n_0\bar v_0\left(1+\frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t\right)^{-\frac{2-1+\alpha}{1+\alpha}} = n_0\bar v_0\,\frac{1}{1+\frac{1+\alpha}{2}\omega_0 t}$$

$$\Longrightarrow \frac{1+\alpha}{2}\omega_0\left[-\xi + \gamma(d + c\nabla_{c_1})\right]\tilde f(c_1) = -\sigma^{d-1}\cancel{n_0\bar v_0}\,\cancel{\beta_1}\int dc_2\, |c_{12}|\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2)$$

Or:

$$\omega_0 = n_0\bar v_0\int dc_1\int dc_2\int d\hat\sigma\,(\hat\sigma\cdot c_{12})\,\theta(\hat\sigma\, c_{12})\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2)\cdot\sigma^{d-1}$$

$$= \cancel{n_0\bar v_0}\,\cancel{\beta_1}\,\langle c_{12}\rangle\cdot\sigma^{d-1} \quad ; \ \xi = \frac{2}{1+\alpha} \ ; \ \gamma = -\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$$\Longrightarrow \frac{1+\alpha}{2}\langle c_{12}\rangle\left[-\frac{2}{1+\alpha} - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}(d + c\nabla_{c_1})\right]\tilde f(c_1)\cdot\sigma^{d-1} = -\sigma^{d-1}\int dc_2\, |c_{12}|\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2)$$

$$\Longrightarrow \langle c_{12}\rangle\left[-1 - \frac{1-\alpha}{2}(d + c\nabla_{c_1})\right]\cdot\sigma^{d-1}\,\tilde f(c_1) = -\sigma^{d-1}\int dc_2\, |c_{12}|\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2)$$

$$\Longrightarrow \left[1 + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)(d + c\nabla_{c_1})\right]\tilde f(c_1)\cancel{\sigma^{d-1}} = \frac{\sigma^{d-1}}{\langle c_{12}\rangle}\int dc_2\, |c_{12}|\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left[1 + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)(d + c\nabla_{c_1})\right]\tilde f(c_1) = \int dc_2\,\frac{|c_{12}|}{\langle c_{12}\rangle}\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2)}$$

(1)

$$\Rightarrow \left(-\frac{\xi}{t} - \frac{\xi-\delta}{2t}\left(d + c\frac{d}{dc}\right)\right)\tilde{f} = -p\frac{B}{t}G(d)\int dc_2\, |c_{12}|\, \hat{f}(c_2)\, \hat{f}(c_1) + \frac{B}{t}\int dc_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(-\hat{\sigma} v_{ij})(\hat{\sigma}\cdot\hat{v}_{ij})\,|c_{ij}|\left(f(c_1')\hat{f}(c_2') - f(c_1)f(c_2)\right)(1-p)$$

Avec: $\frac{dn}{dt} = -p\,\omega(t) n(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\ln(n) = -\omega(t)p$, mais aussi: $\frac{d}{dt}\ln(n) = -\frac{\xi}{t}$, d'où: $\omega(t) = \frac{\xi}{t}\cdot\frac{1}{p}$, et:

les équations $\frac{dn}{dt} = -\omega(t)\, n$ et $\frac{d}{dt}(nv^2) = -d\,\omega(t) n$ restent similaires dans mon cas :
$\frac{dn}{dt} = -p\cdot\omega(t)\cdot n$ et $\frac{d}{dt}(nv^2) = -p\, d\, \omega(t)\, n v_0^2$
En effet, ces équations se trouvent par intégration de l'équation de Boltzmann, et le terme de collisions élastiques ne modifie en rien le nombre de particules, ni l'énergie, par conséquent ne contribuent pas.

$$\omega(t) = n(t)\cdot V_0(t)\int dc_1\int dc_2 \int d\hat{\sigma}\ \theta(-\hat{\sigma}\cdot c_{12})(-\hat{\sigma}\cdot c_{12})\ \tilde{f}_2(c_1, c_2, \sigma\hat{\sigma})$$

$$= n(t)\cdot V_0(t)\int dc_1\int dc_2 \underbrace{\int d\hat{\sigma}\ \theta(\hat{\sigma}\cdot\hat{c}_{12})(\hat{\sigma}\cdot\hat{c}_{12})}_{=G(d)} |c_{12}|\ \tilde{f}(c_1)\ \tilde{f}(c_2)$$

$$= \underbrace{n(t)V_0(t)\sigma^{d-1}}_{=B/t}\ G(d)\ \langle c_{12}\rangle$$

vient du fait que ω ne dépend que des modules

$$\Rightarrow \frac{1}{p}\frac{\xi}{t} = \frac{B}{t} G(d)\langle c_{12}\rangle$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{p}\frac{\xi}{G(d)\langle c_{12}\rangle}$$

Dans l'équation:

$$\left(\xi + \frac{\xi-\delta}{2}\left(d + c\frac{d}{dc}\right)\right)\tilde{f} = \frac{\xi}{G(d)\langle c_{12}\rangle} G(d)\int dc_2\, |c_{12}|\, \hat{f}(c_2)\,\hat{f}(c_1) \ast \frac{(1-p)}{p}\frac{\xi}{G(d)\langle c_{12}\rangle}\int dc_2 \int d\hat{\sigma}\,\theta(-\hat{\sigma} v_{ij})(\hat{\sigma}\hat{v}_{ij})|c_{ij}|\left(\tilde{f}(c_1')\tilde{f}(c_2') - \hat{f}(c_1)\hat{f}(c_2)\right)$$

(3.3)

$\alpha = \delta/\xi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle c_{12}\rangle\left(1 + \frac{1-\alpha}{2}\left(d + c\frac{d}{dc}\right)\right)\tilde{f}(c_1) = \hat{f}(c_1)\int dc_2\,|c_{12}|\,f(c_2) \ast \underbrace{\frac{(1-p)/p}{G(d)}\int dc_2 \int d\hat{\sigma}\,\theta(+\hat{\sigma} v_{ij})(\hat{\sigma}\cdot\hat{v}_{ij})|c_{ij}|\left(\tilde{f}(c_1')f(c_2') - \tilde{f}(c_1)\hat{f}(c_2)\right)}_{\text{nouveau terme.}} \circledast \\ G(d) = \int d\hat{\sigma}\,(\hat{\sigma}\cdot\hat{v}_{12})\,\theta(\hat{\sigma}\cdot\hat{v}_{12}) = \text{cas particulier de } C_k(d) \text{ donné par:} \end{cases}$$

$$G_k(d) = \int d\hat{\sigma}\,(\hat{\sigma}\cdot\hat{v}_{12})^k\theta(\hat{\sigma}\cdot\hat{v}_{12}) = \pi^{(d-1)/2}\frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma((k+d)/2)}$$, donc pour $k = 1$: $(\Gamma(x) = (x-1)!)$

$$G(d) = \pi^{\frac{d-1}{2}}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(d/2+1/2)} = \cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}\frac{2^d}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{(2d-1)!!}} \neq \cancel{\pi^{d/2-1}\frac{2^d}{(2d-1)!!}}$$

En toute généralité, on cherche une solution en polynômes de Sonine:

$$\begin{cases} \tilde{f}(c) = M(c)\left(1 + \sum_{n\geq 1} a_n S_n(c^2)\right) & ;\ M(c) = (d/\pi)^{d/2} e^{-dc^2} \quad ;\ a_1 = 0,\ a_2 \neq 0 \\ a_2 = \langle S_2(c^2)|\tilde{f}(c)\rangle = \frac{d^2}{3}\left(\langle c_i^4\rangle - 3\langle c_i^2\rangle^2\right) = \frac{d}{d+2}\langle c^4\rangle - 1 \end{cases}$$

erreur de définition ⚠

En utilisant: $\int dc\ c^k\left(d + c\frac{d}{dc}\right)\tilde{f}_1(c) = -k\langle c^k\rangle$ et en intégrant l'éqn. obtenue $\int dc_1\, c_1^k$ on obtient:

$$\langle c_{12}\rangle \underbrace{\int dc_1\, c_1^k\,\tilde{f}(c_1)}_{=\langle c_1^k\rangle} + \langle c_{12}\rangle\frac{1-\alpha}{2}\underbrace{\int dc_1\, c_1^k\left(d + c\frac{d}{dc}\right)\tilde{f}(c_1)}_{=-k\langle c_1^k\rangle} = \underbrace{\int dc_1\, c_1^k\int dc_2\ \tilde{f}(c_1)\tilde{f}(c_2)|c_{12}|}_{=\langle c_{12}\, c_1^k\rangle} - \frac{(1-p)/p}{G(d)}\underbrace{\int dc_1\int dc_2\int d\hat{\sigma}\ \theta(\hat{\sigma}\cdot v_{ij})(\hat{\sigma}\cdot\hat{v}_{ij})\cdot|c_{ij}|c_1^k\left(\tilde{f}(c_1')\tilde{f}(c_2') - \tilde{f}(c_1)\tilde{f}(c_2)\right)}_{:= -\mathcal{M}_k}$$

$$\Rightarrow \langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle + (\alpha-1)\frac{k}{2}\langle c_1^k\rangle\langle c_{12}\rangle = \langle c_{12}\, c_1^k\rangle + \frac{(1-p)/p}{G(d)}\mathcal{M}_k$$

$$\Rightarrow (\alpha-1)\frac{k}{2}\langle c_1^k\rangle\langle c_{12}\rangle = \langle c_{12}\, c_1^k\rangle - \langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle + \frac{(1-p)}{p}\frac{\mathcal{M}_k}{G(d)}$$

$$\Rightarrow \alpha - 1 = \frac{2}{k}\left(\frac{\langle c_{12}\, c_1^k\rangle - \langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle}\right) + \frac{(1-p)/p}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle}\frac{\mathcal{M}_k}{G(d)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1 + \frac{2}{k}\left(\frac{\langle c_{12}\, c_1^k\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle} - 1\right) + \frac{(1-p)/p}{G(d)}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle}\mathcal{M}_k}$$

(à priori divergence, mais en vérité non car il faut d'abord calculer $\mathcal{M}_k$, puis insérer et récupérer $a_2(p)$) (1)

$$\mathcal{M}_k = -\int dc_1\int dc_2\int d\hat{\sigma}\ \theta(\hat{\sigma}\cdot v_{ij})(\hat{\sigma}\cdot\hat{v}_{ij})\cdot|c_{ij}|\, c_1^k\left(\tilde{f}(c_1')\tilde{f}(c_2') - \hat{f}(c_1)\tilde{f}(c_2)\right)$$ (m̂ définition que dans l'article de Noije, Ernst)

Comme $\mathcal{M}_k$ est connu par l'article Noije & Ernst, alors on a directement: (Δ! : leur gaussienne diffère de la nôtre)

$\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_k(a_2)$: connu. $\mathcal{M}_2(\alpha=1) = 0$. $\mathcal{M}_k(\alpha=1) \neq 0$.

Et on sait aussi que :

$$\alpha = \frac{\langle c_{12}\, c_1^2\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^2\rangle}$$

donc il semblerait qu'il n'y ait à présent plus qu'à jouer avec les polynômes de Sonine pour $k = 2$, et calculer ces moments $\langle c_{12}\rangle$, $\langle c_1^k\rangle$, $\langle c_{12}\, c_1^k\rangle$.
Ne l'a-t-on pas déjà fait dans l'article de Trizac & Droz & Piasecki?
Autre chose intéressante: faire la limite $c_1\to 0$ de mon équation de Boltzmann ⊛, pour $\alpha \neq 1$ (cas plus général), et effectuer les intégrations (ordre plus bas = meilleur)

$$\boxed{\langle c_{12}\rangle\left(1 + \frac{1-\alpha}{2}\left(d + c\frac{d}{dc}\right)\right)\tilde{f}(c_1) = \tilde{f}(c_1)\int dc_2\,|c_{12}|\,\tilde{f}(c_2) - \frac{1-p}{p}\frac{1}{G(d)}\int dc_2\int d\hat{\sigma}\,\theta(\hat{\sigma} v_{ij})(\hat{\sigma}\cdot\hat{v}_{ij})|c_{ij}|\left(\frac{1}{\alpha^2}\tilde{f}(c_1')\tilde{f}(c_2') - \tilde{f}(c_1)\tilde{f}(c_2)\right)}$$ (2)

$$c_1' = c_1 - \frac{1}{2}\frac{1+\alpha}{\alpha}(c_{12}\hat{\sigma})\hat{\sigma}$$

$$c_2' = c_2 + \frac{1}{2}\frac{1+\alpha}{\alpha}(c_{12}\hat{\sigma})\hat{\sigma}$$

⚠ Loi de collision : α , loi inverse : α^{-1}

Limite $c_1\to 0$:

$$\langle c_{12}\rangle\left(1 + \frac{1-\alpha}{2}(d+m)\right)c_1^m = c_1^m\underbrace{\int dc_2\ c_2\,\tilde{f}(c_2)}_{=\langle c_1\rangle} - \frac{1-p}{p}\frac{1}{G(d)}\int dc_2\int d\hat{\sigma}\ \lim_{c_1\to 0}\theta(\hat{\sigma}\cdot c_{ij})(\hat{\sigma}\cdot\hat{c}_{ij})|c_{ij}|\left(\frac{1}{\alpha^2}\tilde{f}(c_1')\hat{f}(c_2') - \hat{f}(c_1)\hat{f}(c_2)\right)$$

coeff de restitution

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1-\alpha}{2}(d+m)\right)c_1^m = c_1^m\frac{\langle c_1\rangle}{\langle c_{12}\rangle} - \frac{1-p}{p}\frac{1}{G(d)}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle}\int dc_2\int d\hat{\sigma}\ \lim_{c_1\to 0}\theta(\hat{\sigma}\cdot c_{ij})(\hat{\sigma}\cdot\hat{c}_{ij})|c_{ij}|\left(\frac{1}{\alpha^2}\tilde{f}(c_1')\tilde{f}(c_2') - \tilde{f}(c_1)\tilde{f}(c_2)\right)$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1-\alpha}{2}(d+m)\right)c_1^m = c_1^m\frac{\langle c_1\rangle}{\langle c_{12}\rangle} - \frac{1-p}{p}\frac{1}{G(d)}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle}\underbrace{\int dc_2\int d\hat{\sigma}\ \theta(\hat{\sigma}\cdot\hat{c}_2)(\hat{\sigma}\cdot\hat{c}_2)|c_2|\left(\frac{1}{\alpha^2}\tilde{f}\left(\frac{1}{2}\frac{1+\alpha}{\alpha}(c_2\hat{\sigma})\hat{\sigma}\right)\tilde{f}\left(c_2 - \frac{1}{2}\frac{1+\alpha}{\alpha}(c_2\hat{\sigma})\hat{\sigma}\right) - c_1^m\tilde{f}(c_2)\right)}_{:= \mathcal{I}(f,f)}$$

(même notation que dans l'article Noije + Ernst) (3)

$$\tilde{I}(\tilde f,\tilde f) = - c_1^n \underbrace{\int dc_2 \int d\hat\sigma\, \theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)\,|c_2|\,\tilde f(c_2)} + \frac{1}{\alpha^2}\int dc_2\int d\hat\sigma\, \Theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)\,|c_2|\,\tilde f\left(\tfrac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\cdot\hat\sigma\right)\tilde f\left(c_2 - \tfrac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\hat\sigma\right)$$

$$= \underbrace{\int dc_2\,|c_2|\,\tilde f(c_2)}_{=\langle c_2\rangle}\ \underbrace{\int d\hat\sigma\,\theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)}_{=G(d)}$$

$$= - c_1^n \langle c_1\rangle G(d) + \overbrace{\frac{1}{\alpha^2}\int dc_2\int d\hat\sigma\,\theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)\,|c_2|\,\tilde f\left(\overbrace{\tfrac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\hat\sigma}^{:g}\right)\tilde f\left(c_2 - \overbrace{\tfrac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\cdot\hat\sigma}^{:g}\right)}^{I}$$

erreur de calcul

Comment calculer $\tilde I(\tilde f,\tilde f)$? Aide : article Barrat+Trizac avec $J_{ij}[v_n | f_i, f_j]$. A l'approximation gaussienne, $\tilde I(\tilde f,\tilde f) = 0$ (l'équation de Boltzmann résolue pour la solution gaussienne). Non, on ne peut pas utiliser la chose : plutôt utiliser Sonine à l'ordre a_2 :

$$\tilde f(c) = \mathcal{M}(c)\left(1 + a_2 S_2(c^2)\right) \quad ; \quad \mathcal{M}(c) = (d/\pi)^{d/2} e^{-dc^2} \quad ; \quad S_2(x) = \frac{d^2}{8}x^2 - \frac{d(d+2)}{4}x + \frac{d(d+2)}{8}$$

erreur de définition ⚠

$$\int dc\, S_n(c^2)\, S_m(c^2)\,\mathcal{M}(c) = \langle S_n | S_m\rangle = \delta_{nm}\cdot \text{cte}$$

$$I = \int dc_2 \int d\hat\sigma\, \Theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)\,|c_2|\ \mathcal{M}(g)\left(1 + a_2 S_2(g^2)\right)\mathcal{M}(c_2 - g)\left(1 + a_2 S_2((c_2-g)^2)\right)$$

$$= \int dc_2\int d\hat\sigma\,\theta(\hat\sigma\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)\,|c_2|\left(\frac{d}{\pi}\right)^d \exp\left(-dg^2 - dc_2^2 - dg^2 + 2dc_2\cdot g\right)\left(1 + a_2\left(S_2(g^2) + S_2((c_2-g)^2)\right) + O(a_2^2)\right)$$

Avec :

$$\begin{cases} c_2\cdot g = \frac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)^2 = \frac{2\alpha}{1+\alpha}g^2 \\ g^2 = \left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 (c_2\cdot\hat\sigma)\cdot\hat\sigma\,(c_2\cdot\hat\sigma)\cdot\hat\sigma = \left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 (c_2\cdot\hat\sigma)^2 = \left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right) c_2\cdot g \end{cases}$$

$$S_2(g^2) = \frac{d^2}{8}g^4 - \frac{d(d+2)}{4}g^2 + \frac{d(d+2)}{8}$$

$$S_2((c_2-g)^2) = \frac{d^2}{8}\underbrace{(c_2-g)^4}_{\substack{=c_2^4 - 4c_2^3 g \\ +6c_2^2g^2 - 4c_2 g^3 + g^4}} - \frac{d(d+2)}{4}\underbrace{(c_2-g)^2}_{=c_2^2+g^2-2c_2\cdot g} + \frac{d(d+2)}{8} = \frac{d^2}{8}\Big(c_2^4 - 4c_2^2\underbrace{(c_2 g)}_{=\frac{2\alpha}{1+\alpha}g^2} + 6\underbrace{(c_2 g)^2}_{=\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^2 g^4} - 4\underbrace{(c_2\cdot g)}_{=\frac{2\alpha}{1+\alpha}g^2}g^2 + g^4\Big) - \frac{d(d+2)}{4}\Big(c_2^2 + g^2 - 2\underbrace{c_2\cdot g}_{=\frac{2\alpha}{1+\alpha}g^2}\Big) + \frac{d(d+2)}{8}$$

$$= \frac{d^2}{8}\Big(c_2^4 - 4\frac{2\alpha}{1+\alpha}\overbrace{(c_2\cdot g)^2}^{=\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^2 g^4} + 6\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^2 g^4 - 4\frac{2\alpha}{1+\alpha}g^4 + g^4\Big) - \frac{d(d+2)}{4}\left(c_2^2 + g^2\left(1 - \frac{4\alpha}{1+\alpha}\right)\right) + \frac{d(d+2)}{8}$$

$$= \frac{d^2}{8}\left(c_2^4 - \frac{8\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^2 g^4 + 6\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^2 g^4 - 4\frac{2\alpha}{1+\alpha}g^4 + g^4\right) - \frac{d(d+2)}{4}\left(c_2^2 + g^2\left(1 - \frac{4\alpha}{1+\alpha}\right)\right) + \frac{d(d+2)}{8}$$

$$= \frac{d^2}{8}\left(c_2^4 + g^4\left(1 - \frac{8\alpha}{1+\alpha} + 6\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^2 - 4\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^3\right)\right) - \frac{d(d+2)}{4}c_2^2 - \frac{d(d+2)}{4}\left(1 - \frac{4\alpha}{1+\alpha}\right)g^2 + \frac{d(d+2)}{8}$$

$$= \frac{d^2}{8}c_2^4 - \frac{d(d+2)}{4}c_2^2 - \frac{d(d+2)}{4}\left(1 - \frac{4\alpha}{1+\alpha}\right)g^2 + \frac{d^2}{8}\left(1 - \frac{8\alpha}{1+\alpha} + 6\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^2 - 4\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^3\right)g^4 + \frac{d(d+2)}{8}$$

De plus : isotropie des polynômes de Sonine $\Rightarrow$ $g^2 = \left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 (c_2\cdot\hat\sigma)^2 = \left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 c_2^2\cdot\hat\sigma^2 = \left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 c_2^2$ car σ est un vecteur unitaire. Ainsi :

$$S_2(g^2) = \frac{d^2}{8}\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^4 c_2^4 - \frac{d(d+2)}{4}\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 c_2^2 + \frac{d(d+2)}{8}$$

$$S_2((c_2-g)^2) = \frac{d^2}{8}c_2^4 - \frac{d(d+2)}{4}c_2^2 - \frac{d(d+2)}{4}\left(1 - \frac{4\alpha}{1+\alpha}\right)\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 c_2^2 + \frac{d^2}{8}\left(1 - \frac{8\alpha}{1+\alpha} + 6\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^2 - 4\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^3\right)\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^4 c_2^4 + \frac{d(d+2)}{8}$$

$$\exp\Big(-dg^2 - dc_2^2 + 2d\underbrace{c_2 g}_{=\frac{2\alpha}{1+\alpha}g^2}\Big) = \exp\left(-d\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 c_2^2 - dc_2^2 + 2d\frac{2\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 c_2^2\right) = \exp\left(-dc_2^2\left(\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 + 1 - 2\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)\right)$$

$$S_2(g^2) + S_2((c_2-g)^2) = c_2^4\left[\frac{d^2}{8}\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^4 + \frac{d^2}{8} + \frac{d^2}{8}\left(1 - \frac{8\alpha}{1+\alpha} + 6\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^2 - 4\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^3\right)\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^4\right] + c_2^2\left[-\frac{d(d+2)}{4}\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{d(d+2)}{4} - \frac{d(d+2)}{4}\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2\left(1 - \frac{4\alpha}{1+\alpha}\right)\right] + \frac{d(d+2)}{8}$$

$$= \frac{d(d+2)}{8} - c_2^2\frac{d(d+2)}{4}\left[1 + \left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2\left(1 + 1 - \frac{4\alpha}{1+\alpha}\right)\right] + c_2^4\frac{d^2}{8}\left[\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^4 + 1 + \left(1 - \frac{8\alpha}{1+\alpha} + 6\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^2 - 4\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^3\right)\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^4\right]$$

$$= \frac{d(d+2)}{8} - c_2^2\frac{d(d+2)}{4}\left[1 + \left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2\left(2 - \frac{4\alpha}{1+\alpha}\right)\right] + c_2^4\frac{d^2}{8}\left[1 + \left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^4\left(2 - \frac{8\alpha}{1+\alpha} + 6\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^2 - 4\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^3\right)\right]$$

Conclusion :

$$I = \left(\frac{d}{\pi}\right)^d\int dc_2\,\exp\left[-dc_2^2\left(1 - 2\frac{1+\alpha}{2\alpha} + \left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2\right)\right]\left\{1 + a_2\left(\frac{d(d+2)}{8} - c_2^2\frac{d(d+2)}{4}\left[1 + \left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2\left(2 - \frac{4\alpha}{1+\alpha}\right)\right] + c_2^4\frac{d^2}{8}\left[1 + \left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^4\left(2 - \frac{8\alpha}{1+\alpha} + 6\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^2 - 4\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^3\right)\right]\right)\right\}\times$$

$$\times |c_2|\underbrace{\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)}$$

$= G(d)$: connu : $\hat c_2$ n'est qu'un vecteur unitaire, et par isotropie cette intégrale se factorise

On a que des moments à priori impairs, mais ce n'est pas réellement le cas car il y a $|c_2|$ qui est la norme, par conséquent le tout est une fonction paire dont l'intégrale finale I est non nulle, $I \neq 0$. On va utiliser la relation :

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-\alpha x} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

et on doit calculer des intégrales du type :

$$\int_{\mathbb{R}^d} d^d c_2\, e^{-\beta c_2^2}\,|c_2|\left\{1 + c_2^2 + c_2^4\right\}$$

On a la relation (papier Trizac) :

erreur de définition ⚠

$$\langle c_1^n\rangle_0 = \int dc_1\left(\frac{d}{\pi}\right)^{d/2} e^{-dc^2} c_1^n = \sqrt{\frac{2}{d}}\ \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}$$

$$\Rightarrow \int dc_1\, e^{-dc_1^2} c_1^n = \left(\frac{\pi}{d}\right)^{d/2}\sqrt{\frac{2}{d}}\ \frac{\Gamma((d+n)/2)}{\Gamma(d/2)} = \frac{\pi^{d/2}\sqrt 2}{d^{d/2+1/2}}\ \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} = \frac{\pi^{d/2}}{d^{\frac{d+1}{2}}}\sqrt 2\ \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}$$

On utilise :

$d\cdot c_1^2 = \beta z^2 \Rightarrow c_1 = \sqrt{\beta/d}\, z$; $dc_1 = J dz$; $J = (\beta/d)^{d/2}$, donc avec $c_1^n = (\beta/d)^{n/2} z^n$

$$\int dc_1\, e^{-dc_1^2} c_1^n = (\beta/d)^{\frac{d+n}{2}}\int dz\, e^{-\beta z^2} z^n = \frac{\pi^{d/2}}{d^{\frac{d+1}{2}}}\sqrt 2\ \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}$$

$$\Rightarrow \int dz\, e^{-\beta z^2} z^n = \left(\frac{d}{\beta}\right)^{\frac{d+n}{2}}\frac{1}{d^{\frac{d+1}{2}}}\ \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt 2}\ \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} = \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{\beta^{\frac{d+n}{2}}}\ \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt 2}\ \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} = \langle z^n\rangle_0$$

Ainsi, avec $\beta = d\cdot\left(1-2\,\frac{1+\alpha}{2\alpha}+\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2\right)$, on a :

$$\frac{I}{G(d)} = \left(\frac{d}{\pi}\right)^d \underbrace{\int dc_2\, e^{-\beta c_2^2}|c_2|}_{\langle z^1\rangle_0} + \left(\frac{d}{\pi}\right)^d \underbrace{\int dc_2\, e^{-\beta c_2^2}|c_2|}_{=\langle z^1\rangle_0} a_2 \frac{d(d+2)}{8} - \left(\frac{d}{\pi}\right)^d \underbrace{\int dc_2\, e^{-\beta c_2^2}|c_2|^3}_{=\langle z^3\rangle_0} a_2 \frac{d(d+2)}{4}\left[1+\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2\left(2-\frac{4\alpha}{1+\alpha}\right)\right]$$

$$+ \left(\frac{d}{\pi}\right)^d \underbrace{\int dc_2\, e^{-\beta c_2^2}|c_2|^5}_{=\langle z^5\rangle_0} a_2 \frac{d^2}{8}\left[1+\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^4\left(2-\frac{8\alpha}{1+\alpha}+6\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^2-4\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^3\right)\right]$$

erreur de calcul

Conclusion :

$$\tilde{I}(\tilde f,\tilde f) = -c_1^{\mu}\langle c_1\rangle G(d) + \frac{1}{\alpha^2}G(d)\left\{\left(\frac{d}{\pi}\right)^d\langle z^1\rangle_0 + \left(\frac{d}{\pi}\right)^d\langle z^1\rangle_0\frac{d(d+2)}{8}a_2 - \left(\frac{d}{\pi}\right)^d\langle z^3\rangle_0\, a_2\frac{d(d+2)}{4}\left[1+\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2\left(2-\frac{4\alpha}{1+\alpha}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \left(\frac{d}{\pi}\right)^d\langle z^5\rangle_0\, a_2\frac{d^2}{8}\left[1+\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^4\left(2-\frac{8\alpha}{1+\alpha}+6\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^2-4\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^3\right)\right]\right\}$$

$$= -c_1^{\mu}\langle c_1\rangle G(d) + G(d)\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{d}{\pi}\right)^d\left\{\langle z^1\rangle_0 + a_2\left(\langle z^1\rangle_0\frac{d(d+2)}{8} - \langle z^3\rangle_0\frac{d(d+2)}{4}\left[1+\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2\left(2-\frac{4\alpha}{1+\alpha}\right)\right]\right.\right.$$
$$\left.\left. + \langle z^5\rangle_0\frac{d^2}{8}\left[1+\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^4\left(2-\frac{8\alpha}{1+\alpha}+6\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^2-4\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^3\right]\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1-\alpha}{2}(d+n)\right)\underbrace{c_1^{n}}_{\text{à évaluer avec soin}} = c_1^{n}\frac{\langle c_1\rangle}{\langle c_{12}\rangle} - \frac{1-p}{p}\frac{1}{G(d)}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle}\tilde I(\tilde f,\tilde f)$$

avec :

$$\langle z^n\rangle_0 = \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{\beta^{\frac{d+n}{2}}}\,\frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} \quad ; \quad \beta = d\left(1-2\,\frac{1+\alpha}{2\alpha}+\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2\right)$$

$$\langle c_1\rangle = \left(1+\frac{a_2}{8}\,1\cdot(1-2)\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{d}}\,\frac{\Gamma(d/2+1/2)}{\Gamma(d/2)} = \sqrt{\frac{2}{d}}\,\frac{\Gamma(d/2+1/2)}{\Gamma(d/2)}\left(1-\frac{a_2}{8}\right)$$

Ce calcul est très général, et peut être utilisé dans plusieurs contextes. Par exemple, une amélioration du calcul de Noije et Ernst. Dans leur cas, ∄ d'annihilation, et leurs distributions sont régulières à l'origine (i.e. $\mu=0$), l'équation (10) est : (ordre plus bas !) ↓ vérification de mon calcul !

$$\underbrace{\frac{\mu_2}{d}\left(d+c_1\frac{d}{dc_1}\right)\tilde f(c_1)}_{\left\{\begin{array}{l}\lim c_1\to 0 \Rightarrow =\mu_2\\ \tilde f(c_1)\overset{c_1\to 0}{\simeq} c_1^0\end{array}\right.} = \tilde I(\tilde f,\tilde f) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\mu_2 = \tilde I(\tilde f,\tilde f)}$$

↓ même définition que la mienne

avec leur μ_2 qui est donné par :

$$\mu_2 = \frac{1}{2}(1-\alpha^2)\frac{\Omega_d}{\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{3}{16}a_2\right) = \frac{1}{4}(1-\alpha^2)\beta_3\langle c_{12}^3\rangle_0\left(1+\frac{3}{16}a_2\right) \quad ;\ \beta_n : \text{connu (A.3)} \ ;\ \Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

⚠ i) cette relation a été établie pour $M(c) = \frac{1}{\pi^{d/2}}\exp(-c^2)$, alors que nous avons $M(c) = d^{d/2}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-dc^2}$. Il faut faire la correspondance avec notre formalisme.

↳ $\mu_p^{eux} = -\frac{1}{2}\int dc_1\int dc_2\int d\hat\sigma\,\theta(\hat\sigma\cdot c_{12})(\hat\sigma\cdot c_{12})f(c_1)f(c_2)\Delta(c_1^p+c_2^p) = g(d)\,\mu_p^{moi}$

Chgt. de variables : $c=\sqrt{d}\,y$, $y=\frac{1}{\sqrt d}c$, $dc = d^{d/2}dy$, donc :

$$\mu_p^{eux} = -\frac{1}{2}\int dc_1\int dc_2\, d^{d/2}d^{d/2}\int d\hat\sigma\,\theta(\hat\sigma\cdot c_{12})(\hat\sigma\cdot c_{12})\sqrt{d}\, f(\sqrt d y_1)f(\sqrt d y_2)\Delta(c_1^p+c_2^p)\,d^{p/2}$$
$$= -d^{d+\frac{p+1}{2}}\frac{1}{2}\int dc_1\int dc_2\int d\hat\sigma\,\theta(\hat\sigma\cdot c_{12})(\hat\sigma\cdot c_{12})f(\sqrt d y_1)f(\sqrt d y_2)\Delta(c_1^p+c_2^p)$$
$$= -d^{d+\frac{p+1}{2}}\frac{1}{2}\int dc_1\int dc_2\int d\hat\sigma\,\theta(\hat\sigma\cdot c_{12})(\hat\sigma\cdot c_{12})\frac{1}{\pi^{d/2}}\exp(-dc_1^2)\frac{1}{\pi^{d/2}}\exp(-dc_2^2)\left\{1+a_2\left(S_2(dc_1^2)+S_2(dc_2^2)\right)+\dots\right\}\Delta(c_1^p+c_2^p)$$
$$= -d^{\frac{p+1}{2}}\frac{1}{2}\int dc_1\int dc_2\int d\hat\sigma\,\theta(\hat\sigma\cdot c_{12})(\hat\sigma\cdot c_{12})\underbrace{\frac{d^{d/2}}{\pi^{d/2}}e^{-dc_1^2}}_{=M^{moi}(c_1)}\underbrace{\frac{d^{d/2}}{\pi^{d/2}}e^{-dc_2^2}}_{=M^{moi}(c_2)}\left\{1+a_2\left(S_2(dc_1^2)+S_2(dc_2^2)\right)\right\}\Delta(c_1^p+c_2^p)$$
$$= d^{\frac{p+1}{2}}\mu_p^{moi}$$

$$\Longrightarrow \mu_p^{moi} = d^{-\frac{p+1}{2}}\mu_p^{eux}$$

Dans le cas $p=2$ qui nous intéresse :

$$\mu_2^{moi} = d^{-3/2}\,\frac{1}{2}(1-\alpha^2)\frac{\Omega_d}{\sqrt{2\pi}}\left\{1+\frac{3}{16}a_2\right] \quad ;\ \Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

• Vérification du calcul de $\tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f})$:

$$\tilde{I}(\tilde f,\tilde f) = \int dc_2 \int d\hat\sigma\, \theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2| \left\{ \tfrac{1}{\alpha^2} \tilde f\left(\tfrac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\hat\sigma\right) \tilde f\left(c_2 - \tfrac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\cdot\hat\sigma\right) - c_1^m \tilde f(c_2)\right\} \quad ; \; c_1^m = \lim_{c_1\to 0} \tilde f(c_1) = \mathcal{M}(0)\cdot(1 + a_2\cdot S_2(0)+\dots)$$

$$= -c_1^m \underbrace{\int dc_2 \int d\hat\sigma\, \theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2| \tilde f(c_2)}_{= \underbrace{\int d\hat\sigma\,\theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)}_{=G(d)} \underbrace{\int dc_2 |c_2| \tilde f(c_2)}_{=\langle c_2\rangle}} + 1/\alpha^2 \int dc_2 \int d\hat\sigma\, \theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2| \tilde f\left(\tfrac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\hat\sigma\right)\tilde f\left(c_2 - \tfrac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\hat\sigma\right)$$

$$; \; G(d) = \beta_{n=1} = \pi^{\frac{d-1}{2}} \Gamma\left(\tfrac{n+1}{2}\right)/\Gamma\left(\tfrac{n+d}{2}\right)\Big|_{n=1}$$

$$= -c_1^m G(d)\langle c_1\rangle + \tfrac{1}{\alpha^2} \underbrace{\int dc_2 \int d\hat\sigma\, \theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2| \tilde f(g)\tilde f(c_2-g)}_{:= I} \quad ; \; g = \tfrac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\hat\sigma$$

Calcul de I : développement en polynômes de Sonine :

$$\tilde f(c) = \mathcal{M}(c)\cdot\{1 + a_2 S_2(c^2)\} \quad ; \; \mathcal{M}(c) = 1/\pi^{d/2}\exp(-c^2) \quad ; \; S_2(x) = \tfrac12 x^2 - \tfrac{d+2}{2}x + \tfrac18 d(d+2) \quad ; \; \int dc\, \mathcal{M}(c) S_n(x^2) S_m(x^2) = \langle S_n | S_m\rangle \sim \delta_{nm}$$

Non.

$$\Rightarrow I = \int dc_2 \int d\hat\sigma\, \theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2| \mathcal{M}(g)\mathcal{M}(c_2-g)(1 + a_2\cdot S_2(g^2))(1 + a_2 S_2((c_2-g)^2))$$

$$= \int dc_2 \int d\hat\sigma\, \theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2| \exp(-g^2 - c_2^2 - g^2 + 2c_2\cdot g)(1 + a_2(S_2(g^2) + S_2((c_2-g)^2))) + O(a_2^2)$$

Avec : $\quad c_2\cdot g = \frac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\hat\sigma\cdot c_2 = \frac{1+\alpha}{2\alpha}\frac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)(c_2\cdot\hat\sigma)\frac{2\alpha}{1+\alpha} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}g^2$

de plus comme toutes les fonctions sont isotropes, alors on peut écrire :

$$g^2 = \left(\tfrac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 c_2^2 = \beta^2 c_2^2 \quad ; \; \beta = \tfrac{1+\alpha}{2\alpha}$$

$$c_2\cdot g = \tfrac{2\alpha}{1+\alpha} g^2 = \tfrac{2\alpha}{1+\alpha}\beta^2 c_2^2 = \beta c_2^2$$

$$\Rightarrow I = \int dc_2 \int d\hat\sigma\, \theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2| \exp(-2\beta^2 c_2^2 - c_2^2 + 2\beta c_2^2)\cdot(1 + a_2(S_2(g^2) + S_2((c_2-g)^2)))$$

$$S_2(g^2) = 1/2\, g^4 - \tfrac{d+2}{2} g^2 + \tfrac{d(d+2)}{8} = 1/2\,\beta^4 c_2^4 - \tfrac{d+2}{2}\beta^2 c_2^2 + \tfrac{d(d+2)}{8}$$

$$S_2((c_2-g)^2) = 1/2\,(c_2-g)^4 - \tfrac{d+2}{2}(c_2-g)^2 + \tfrac{d(d+2)}{8} = 1/2\,(c_2^4 - 4c_2^2 c_2\cdot g + 6c_2^2 g^2 - 4c_2 g^3 + g^4) - \tfrac{d+2}{2}(c_2^2 - 2c_2\cdot g + g^2) + \tfrac{d(d+2)}{8}$$

$$= 1/2\,(c_2^4 - 4c_2^2(c_2\cdot g) + 6c_2^2\beta^2 c_2^2 - 4(c_2\cdot g)\beta^2 c_2^2 + g^4) - \tfrac{d+2}{2}(c_2^2 - 2\beta c_2^2 + \beta^2 c_2^2) + \tfrac{d(d+2)}{8}$$

$$= 1/2\,(c_2^4 - 4\beta c_2^4 + 6\beta^2 c_2^4 - 4\beta^3 c_2^4 + \beta^4 c_2^4) - \tfrac{d+2}{2}(c_2^2 - 2\beta c_2^2 + \beta^2 c_2^2) + d(d+2)/8$$

$$= c_2^4\cdot\tfrac12(1 - 4\beta + 6\beta^2 - 4\beta^3 + \beta^4) - c_2^2\tfrac{d+2}{2}(1 - 2\beta + \beta^2) + \tfrac{d(d+2)}{8}$$

$$= c_2^4\cdot\tfrac12(1-\beta)^4 - c_2^2\tfrac{d+2}{2}(1-\beta)^2 + \tfrac{d(d+2)}{8}$$

$$S_2(g^2) + S_2((c_2-g)^2) = c_2^4\,\tfrac12(\beta^4 + (1-\beta)^4) - c_2^2\tfrac{d+2}{2}(\beta^2 + (1-\beta)^2) + \tfrac{d(d+2)}{4}$$

$$\Rightarrow I = \int dc_2 \int d\hat\sigma\, \theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2| \exp(-c_2^2(\beta^2 + (1-\beta)^2))\left(\left[c_2^4\tfrac12(\beta^4 + (1-\beta)^4) - c_2^2\tfrac{d+2}{2}(\beta^2 + (1-\beta)^2) + \tfrac{(d+2)d}{4}\right]a_2 + 1\right)$$

$$= \underbrace{\int d\hat\sigma\,\theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)}_{=G(d)} \int dc_2 \exp(-c_2^2(\beta^2 + (1-\beta)^2))\left(\left[c_2^5\tfrac12(\beta^4 + (1-\beta)^4) - c_2^3\tfrac{d+2}{2}(\beta^2 + (1-\beta)^2) + c_2\tfrac{d(d+2)}{4}\right]a_2 + c_2\right)$$

On doit calculer des intégrales du type $\int_{\mathbb{R}^d} d^d c_2\, e^{-\gamma c_2^2}(1 + c_2^3 + c_2^5)$ dans $\mathbb{R}^d$. On utilise une relation de l'article de Trizac :

$$\langle c_1^n\rangle_0 = \int dc_1 dc_2\, \tilde f(c_1)\tilde f(c_2) c_1^n = \int dc_1\, \tilde f(c_1) c_1^n = \int dc_1\, \mathcal{M}(c_1) c_1^n = \int dc_1\, \pi^{-d/2} e^{-c_1^2} c_1^n = \sqrt{2/d}\,\Gamma\left(\tfrac{d+n}{2}\right)/\Gamma(d/2)$$

$$\Rightarrow \int dc_1\, e^{-c_1^2} c_1^n = \pi^{d/2}\sqrt{2/d}\,\Gamma\left(\tfrac{d+n}{2}\right)/\Gamma(d/2) \quad ; \; c_1 = \sqrt{\gamma}\, z \; ; \; dc_1 = \gamma^{d/2}dz \; ; \; \gamma = \beta^2 + (1-\beta)^2 \; ; \; c_1^n = \gamma^{n/2} z^n$$

$$= \int dz\, \gamma^{d/2} e^{-\gamma z^2}\gamma^{n/2} z^n$$

$$\Rightarrow \int dz\, e^{-\gamma z^2} z^n = \gamma^{-\frac{d+n}{2}}\pi^{d/2}\sqrt{2/d}\,\Gamma\left(\tfrac{d+n}{2}\right)/\Gamma(d/2) = \frac{\pi^{d/2}}{\gamma^{\frac{d+n}{2}}}\sqrt{\tfrac{2}{d}}\,\Gamma\left(\tfrac{d+n}{2}\right)/\Gamma(d/2) := \langle z^n\rangle \quad ; \; \gamma = \beta^2 + (1-\beta)^2 \; ; \; \beta = \tfrac{1+\alpha}{2\alpha}$$

$$\langle c_1^n\rangle_0 = \frac{\gamma^{\frac{d+n}{2}}}{\pi^{d/2}}\langle z^n\rangle$$

On peut donc finalement calculer I :

$$I = G(d)\left\{1/2(\beta^4 + (1-\beta)^4)\langle z^5\rangle - \tfrac{d+2}{2}(\beta^2 + (1-\beta)^2)\langle z^3\rangle + \tfrac{d(d+2)}{4}\langle z^1\rangle\right\}a_2 + G(d)\cdot\langle z^1\rangle$$

On a donc :

$$\tilde I(\tilde f,\tilde f) = G(d)\cdot\left\{-c_1^m\langle c_1\rangle + \langle z^1\rangle + a_2\left(1/2(\beta^4 + (1-\beta)^4)\langle z^5\rangle - \tfrac{d+2}{2}(\beta^2 + (1-\beta)^2)\langle z^3\rangle + \tfrac{d(d+2)}{4}\langle z^1\rangle\right)\right\}$$

$$= \lim_{c_1\to 0}\int dc_2 \int d\hat\sigma\, \theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2|\left\{\tfrac{1}{\alpha^2} f_1' f_2' - f_1 f_2\right\}$$

Avec :

$$c_1^m = \lim_{c_1\to 0}\tilde f(c_1) = \lim_{c_1\to 0}\mathcal{M}(c_1)(1 + a_2 S_2(c_1^2)) = 1/\pi^{d/2}(1 + a_2\, 1/8\, d(d+2))$$

$$\langle c_1\rangle = \left(1 + \tfrac{a_2}{8}(-1)\right)\cdot\langle c_1\rangle_0 = (1 - a_2/8)\cdot\gamma^{\frac{d+1}{2}}/\pi^{d/2}\langle z^1\rangle$$

$$\Rightarrow c_1^m\langle c_1\rangle = \pi^{-d/2}(1 + a_2\, 1/8\, d(d+2))\cdot\pi^{-d/2}\gamma^{\frac{d+1}{2}}(1 - a_2/8)\langle z^1\rangle = \gamma^{\frac{d+1}{2}}/\pi^d(1 - a_2/8 + a_2\, 1/8\, d(d+2))\langle z^1\rangle + O(a_2^2)$$

$$= \gamma^{\frac{d+1}{2}}/\pi^d(1 + a_2/8(d(d+2) - 1))\langle z^1\rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Rightarrow \tilde I(\tilde f,\tilde f) &= G(d)\left\{-\gamma^{\frac{d+1}{2}}/\pi^d\langle z^1\rangle + \langle z^1\rangle + a_2\left(-1/8\,\gamma^{\frac{d+1}{2}}/\pi^d(d(d+2)-1)\langle z^1\rangle + \tfrac{d(d+2)}{4}\langle z^1\rangle - \tfrac{d+2}{2}(\beta^2 + (1-\beta)^2)\langle z^3\rangle + \tfrac12(\beta^4 + (1-\beta)^4)\langle z^5\rangle\right)\right\}\\ &= G(d)\left\{\langle z^1\rangle(1 - \gamma^{\frac{d+1}{2}}/\pi^d) + a_2\left(\langle z^1\rangle\left(\tfrac{d(d+2)}{4} - 1/8\,\gamma^{\frac{d+1}{2}}/\pi^d(d(d+2)-1)\right) - \langle z^3\rangle\tfrac{d+2}{2}(\beta^2 + (1-\beta)^2) + \langle z^5\rangle\tfrac12(\beta^4 + (1-\beta)^4)\right)\right\}\\ \langle z^n\rangle &= \pi^{d/2}/\gamma^{\frac{d+n}{2}}\sqrt{2/d}\,\Gamma\left(\tfrac{d+n}{2}\right)/\Gamma(d/2)\\ \gamma &= \beta^2 + (1-\beta)^2 \; ; \; \beta = \tfrac{1+\alpha}{2\alpha} \; ; \; G(d) = \pi^{\frac{d-1}{2}}\, 1/\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)\end{aligned}}$$

Extraction de a_2 : $\mu_2 = \tilde I(\tilde f,\tilde f)$, avec $\mu_2 = 1/2(1-\alpha^2)\frac{\Omega_d}{\sqrt{2\pi}}\left(1 + \tfrac{3}{16}a_2\right)$, $\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$, donc :

Non : à transformer.

$$1/2(1-\alpha^2)\Omega_d/\sqrt{2\pi}(1 + 3/16\, a_2) = G(d)\langle z^1\rangle(1 - \gamma^{\frac{d+1}{2}}/\pi^d) + a_2 G(d)\xi_2 \quad ; \; \xi_2 = \langle z^1\rangle\left(\tfrac{d(d+2)}{4} - \tfrac18\gamma^{\frac{d+1}{2}}/\pi^d(d(d+2)-1)\right) - \langle z^3\rangle\tfrac{d+2}{2}(\beta^2 + (1-\beta)^2) + \langle z^5\rangle\tfrac12(\beta^4 + (1-\beta)^4)$$

$$\Rightarrow 1/2(1-\alpha^2)\Omega_d/\sqrt{2\pi} - G(d)\langle z^1\rangle(1 - \gamma^{\frac{d+1}{2}}/\pi^d) = a_2\left(G(d)\xi_2 - \tfrac{3}{16}\tfrac12(1-\alpha^2)\Omega_d/\sqrt{2\pi}\right)$$

$$\Rightarrow a_2 = \left(1/2(1-\alpha^2)\Omega_d/\sqrt{2\pi} - G(d)\langle z^1\rangle(1 - \gamma^{\frac{d+1}{2}}/\pi^d)\right)/\left(G(d)\xi_2 - 3/32(1-\alpha^2)\Omega_d/\sqrt{2\pi}\right)$$

$$\Gamma\left(\tfrac{d+3}{2}\right) = \Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}+1\right) = \Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)\tfrac{d+1}{2} \qquad \Gamma\left(\tfrac{d+5}{2}\right) = \Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)\tfrac{d+1}{2}\cdot\tfrac{d+3}{2}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{\tfrac12(1-\alpha^2)\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \pi^{\frac{d-1}{2}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\left(1 - \gamma^{\frac{d+1}{2}}\frac{1}{\pi^d}\right)\frac{\pi^{d/2}}{\gamma^{\frac{d+1}{2}}}\sqrt{\frac2d}\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}}{\pi^{\frac{d-1}{2}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\left\{\frac{\pi^{d/2}}{\gamma^{\frac{d+1}{2}}}\sqrt{\frac2d}\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}\left(\frac{d(d+2)}{4} - \frac18\frac{\gamma^{\frac{d+1}{2}}}{\pi^d}(d(d+2)-1)\right) - \frac{\pi^{d/2}}{\gamma^{\frac{d+3}{2}}}\sqrt{\frac2d}\frac{\Gamma\left(\frac{d+3}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}\frac{d+2}{2}(\beta^2 + (1-\beta)^2) + \frac{\pi^{d/2}}{\gamma^{\frac{d+5}{2}}}\sqrt{\frac2d}\frac{\Gamma\left(\frac{d+5}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}\frac12(\beta^4 + (1-\beta)^4)\right\} - \frac{3}{32}(1-\alpha^2)\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$$

$$= \frac{\tfrac12(1-\alpha^2)\frac{2\pi^{d/2}}{\sqrt{2\pi}}\cancel{\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)}\cancel{\pi^{d/2}} - \pi^{\frac{d-1}{2}}\left(1 - \gamma^{\frac{d+1}{2}}\frac{1}{\pi^d}\right)\frac{1}{\gamma^{\frac{d+1}{2}}}\sqrt{\frac2d}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)}{\pi^{-\frac12}\left\{\frac{\pi^{d/2}}{\gamma^{\frac{d+1}{2}}}\sqrt{\frac2d}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)\left(\frac{d(d+2)}{4} - \frac18\frac{\gamma^{\frac{d+1}{2}}}{\pi^d}(d(d+2)-1)\right) - \frac{\pi^{d/2}}{\gamma^{\frac{d+3}{2}}}\sqrt{\frac2d}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)\frac{(d+1)}{1}\frac{(d+2)}{2}(\beta^2 + (1-\beta)^2) + \frac{\pi^{d/2}}{\gamma^{\frac{d+5}{2}}}\sqrt{\frac2d}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)\frac{(d+1)}{2}\frac{(d+3)}{2}\frac12(\beta^4 + (1-\beta)^4)\right\} - \frac{3}{32}(1-\alpha^2)\,2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\tfrac12(1-\alpha^2)\sqrt2 - \pi^{d/2}\left(1 - \gamma^{\frac{d+1}{2}}\frac{1}{\pi^d}\right)\frac{1}{\gamma^{\frac{d+1}{2}}}\sqrt{\frac2d}}{\frac{\pi^{d/2}}{\gamma^{\frac{d+1}{2}}}\sqrt{\frac2d}\left(\frac{d(d+2)}{4} - \frac18\frac{\gamma^{\frac{d+1}{2}}}{\pi^d}(d(d+2)-1)\right) - \frac{\pi^{d/2}}{\gamma^{\frac{d+1}{2}}}\cdot\frac1\gamma\sqrt{\frac2d}\frac{(d+1)(d+2)}{2}(\beta^2 + (1-\beta)^2) + \frac{\pi^{d/2}}{\gamma^{\frac{d+1}{2}}}\frac{1}{\gamma^2}\sqrt{\frac2d}\frac{(d+1)(d+3)}{8}(\beta^4 + (1-\beta)^4) - \frac{3}{16}(1-\alpha^2)\frac{1}{\sqrt2}}$$

$$= \frac{\gamma^{\frac{d+1}{2}}\frac{1}{\pi^{d/2}}\frac{1-\alpha^2}{\sqrt2}\sqrt{\frac d2} - 1 + \gamma^{\frac{d+1}{2}}\frac{1}{\pi^d}}{-\frac{3}{16}(1-\alpha^2)\frac{1}{\sqrt2}\gamma^{\frac{d+1}{2}}\frac{1}{\pi^{d/2}}\sqrt{\frac d2} + \frac{d(d+2)}{4} - \frac18\gamma^{\frac{d+1}{2}}\frac{1}{\pi^d}(d(d+2)-1) - \frac1\gamma\frac{(d+1)(d+2)}{2}(\beta^2 + (1-\beta)^2) + \frac{1}{\gamma^2}\frac{(d+1)(d+3)}{8}(\beta^4 + (1-\beta)^4)}$$

$$= \frac{\gamma^{\frac{d+1}{2}}\left(\frac{1}{\pi^{d/2}}(1-\alpha^2)\frac{\sqrt d}{2} - \frac{1}{\pi^d}\right) - 1}{\gamma^{\frac{d+1}{2}}\left(-\frac{3}{16}(1-\alpha^2)\frac{1}{\pi^{d/2}}\frac{\sqrt d}{2} - \frac18\frac{1}{\pi^d}(d(d+2)-1)\right) + \frac{d(d+2)}{4} - \frac1\gamma\frac{(d+1)(d+2)}{2}(\beta^2 + (1-\beta)^2) + \frac{1}{\gamma^2}\frac{(d+1)(d+3)}{8}(\beta^4 + (1-\beta)^4)}$$

$$= \frac{\gamma^{\frac{d+1}{2}}\frac{1}{\pi^{d/2}}\left(\frac12\sqrt d(1-\alpha^2) - \frac{1}{\pi^{d/2}}\right)}{\gamma^{\frac{d+1}{2}}\frac{1}{\pi^{d/2}}\left(-\frac{3}{32}\sqrt d(1-\alpha^2) - \frac{d(d+2)-1}{8\pi^{d/2}}\right) + \underbrace{\frac{d(d+2)}{4} - \frac1\gamma\frac{(d+1)(d+2)}{2}}_{= -\frac{d^2+4d+6}{4}}\underbrace{(\beta^2 + (1-\beta)^2)}_{=\gamma} + \frac{1}{\gamma^2}\frac{(d+1)(d+3)}{8}(\beta^4 + (1-\beta)^4)}$$

: $\exists$ asymptote pour $\alpha = \alpha^*$
$\Rightarrow$ erreur(s) de calcul

- Vérification du calcul de $a_2(\alpha,d)$ bis. On va tout refaire dans les notations de Noije, c'est-à-dire

$$\tilde f(c) = \mathcal{M}(c)\cdot\{1+\sum_{p=1}^{\infty} a_p S_p(c^2)\} \quad ; \quad \mathcal{M}(c) = 1/\pi^{d/2}\, e^{-c^2} ; \; S_0(x)=1 ; \; S_1(x) = -x+\tfrac{1}{2}d ; \; S_2(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}(d+2)x + \tfrac{1}{8}d(d+2)$$

Pour cela, il faut établir un lien entre les notations de Trizac et celles de Noije. Par un simple changement de variables on y arrive. On commence par transformer les relations de l'annexe de Trizac.

$$\langle c_1^n\rangle^{Tr} = \int dc_1\int dc_2\; c_1^n\, \tilde f(c_1)\tilde f(c_2) \quad ; \quad \tilde f = (d/2\pi)^{d/2} e^{-d/2\,c^2}\{1+a_2 S(c^2)+\dots\} \; ; \; d/2\, c^2 = y^2 \Rightarrow c = \sqrt{2/d}\,y \; ; \; dc = (\tfrac{2}{d})^{d/2} dy$$

$$= \int dy_1\int dy_2\, (2/d)^{d/2}(2/d)^{d/2}\, y_1^n\, (\tfrac{2}{d})^{n/2} (\tfrac{d}{2\pi})^{d/2} e^{-y_1^2} (\tfrac{d}{2\pi})^{d/2} e^{-y_2^2}\cdot\{\underbrace{1+a_2 S(2/d\,y^2)+\dots}_{=\text{ polynômes de Sonine de Noije}}\}$$

$$= (\tfrac{2}{d})^{n/2}\int dy_1\int dy_2\; y_1^n\, \tilde f(y_1)\tilde f(y_2)$$

$$= (2/d)^{n/2}\langle c_1^n\rangle^{Noije}$$

Ainsi, la relation est simplement donnée par $\langle c_1^n\rangle^{Tr} = (2/d)^{n/2}\langle c_1^n\rangle^{Noije}$, où "n" est le moment calculé, et donc on a aussi $\boxed{\mu_p^{Tr} = (2/d)^{\frac{p+1}{2}}\mu_p^{Noije}}$. On effectue donc le calcul dans les notations de Noije (le terme $\lim_{c_1\to 0}\tilde I(\tilde f,\tilde f)$ pourra être récupéré par l'annihilation probabiliste)

$$\underbrace{\lim_{c_1\to 0}\frac{\mu_2}{d}(d+c_1\tfrac{d}{dc_1})\tilde f(c_1)}_{=\mu_2 = \frac{1}{2}(1-\alpha^2)\,\Omega_d/\sqrt{2\pi}\,(1+3/16\,a_2)} = \lim_{c_1\to 0}\tilde I(\tilde f,\tilde f) \quad ; \quad \tilde I(\tilde f,\tilde f) = \int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\cdot c_{12})(\hat\sigma\cdot c_{12})\{\tfrac{1}{\alpha^2}\tilde f(c_1')\tilde f(c_2') - \tilde f(c_1)\tilde f(c_2)\} \qquad (1)$$

$$; \; \Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$$

Il reste à étudier le terme $\tilde I(\tilde f,\tilde f)$:

$$\lim_{c_1\to 0}\tilde I(\tilde f,\tilde f) = \int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\cdot c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2|\{\tfrac{1}{\alpha^2}\tilde f(\tfrac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\hat\sigma)\tilde f(c_2 - \tfrac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\hat\sigma) - c_1^{*}\tilde f(c_2)\} \quad ; \quad c_1^{*} = \lim_{c_1\to 0}\tilde f(c_1) = \mathcal{M}(0)[1+a_2 S_2(0)]+O(a_2^2) = \frac{1}{\pi^{d/2}}(1+a_2\tfrac{1}{8}d(d+2))$$

$$= -c_1^{*}\underbrace{\int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\cdot c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2|\tilde f(c_2)} + \frac{1}{\alpha^2}\int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2|\tilde f(\tfrac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\cdot\hat\sigma)\tilde f(c_2-\tfrac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\hat\sigma)$$

$$= \underbrace{\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\cdot c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)}_{=G(d)}\underbrace{\int dc_2|c_2|\tilde f(c_2)}_{=\langle c_2\rangle^{Noije}} \quad ; \quad G(d) = \beta_{n=1} = \pi^{\frac{d-1}{2}}\Gamma(\tfrac{n+1}{2})/\Gamma(\tfrac{n+d}{2})\Big|_{n=1} = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\Gamma(\tfrac{d+1}{2}) \; ; \; \langle c_2\rangle^{Noije} = (1-a_2/8)\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)$$

$$= -c_1^{*}G(d)\langle c_1\rangle + \frac{1}{\alpha^2}\underbrace{\int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2|\tilde f(g)\tilde f(c_2-g)}_{:=I} \quad ; \quad g = \tfrac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\hat\sigma \qquad (2)$$

Calcul de I en développement de Sonine:

$$I = \int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2|\,\mathcal{M}(g)\mathcal{M}(c_2-g)(1+a_2S_2(g^2))(1+a_2S_2((c_2-g)^2))$$

$$= \int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2|\,1/\pi^{d/2}e^{-g^2}\,1/\pi^{d/2}e^{-(c_2-g)^2}(1+a_2(S_2(g^2)+S_2((c_2-g)^2))) + O(a_2^2)$$

$$= \int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2|\,\pi^{-d}\exp(-g^2-g^2-c_2^2+2c_2\cdot g)\{1+a_2(S_2(g^2)+S_2((c_2-g)^2))\}$$

Avec: $c_2\cdot g = \frac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\hat\sigma\cdot c_2 = \frac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\frac{1+\alpha}{2\alpha}(c_2\cdot\hat\sigma)\frac{2\alpha}{1+\alpha} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}g^2$

et de plus comme toutes les fonctions sont isotropes on peut écrire: $\boxed{\text{NON!}}$ $g^2 \sim (c_2\cdot\sigma)\hat\sigma(c_2\cdot\sigma)\cdot\hat\sigma = \sum c_{2i}\sigma_i\sum c_{2j}\sigma_j\sum_i\sigma_i^2 = (c_2\cdot\sigma)^2 = c_2^2\cdot\cos^2\theta$

changé tout!

$$g^2 = (\tfrac{1+\alpha}{2\alpha})^2 c_2^2 = \beta^2c_2^2 \quad ; \quad \beta = \tfrac{1+\alpha}{2\alpha} \qquad\qquad g^2 = \beta^2c_2^2\cos^2\theta$$

$$c_2\cdot g = \tfrac{2\alpha}{1+\alpha}g^2 = \tfrac{2\alpha}{1+\alpha}\beta^2c_2^2 = \beta c_2^2 \qquad\qquad c_2\cdot g = \beta c_2^2\cos\theta$$

$$\Rightarrow I = \int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\cdot\hat c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2|\,\pi^{-d}\exp(-2\beta^2c_2^2-c_2^2+2\beta c_2^2)(1+a_2(S_2(g^2)+S_2((c_2-g)^2)))$$

$$S_2(g^2) = 1/2\,g^4 - 1/2\,(d+2)g^2 + 1/8\,d(d+2) = \tfrac{1}{2}\beta^4c_2^4 - \tfrac{(d+2)}{2}\beta^2c_2^2 + \tfrac{d(d+2)}{8}$$

$$S_2((c_2-g)^2) = \tfrac{1}{2}(c_2-g)^4 - \tfrac{(d+2)}{2}(c_2-g)^2 + \tfrac{d(d+2)}{8} = \tfrac{1}{2}(c_2^4 - 4c_2^3g + 6c_2^2g^2 - 4c_2g^3 + g^4) - \tfrac{d+2}{2}(c_2^2+g^2-2c_2\cdot g) + \tfrac{d(d+2)}{8}$$

$$= \tfrac{1}{2}(c_2^4 - 4c_2^2(c_2\cdot g) + 6c_2^2\beta^2c_2^2 - 4g^2(c_2\cdot g) + \beta^4c_2^4) - \tfrac{d+2}{2}(c_2^2+\beta^2c_2^2-2\beta c_2) + \tfrac{d(d+2)}{8}$$

$$= \tfrac{1}{2}c_2^4(1-4\beta+6\beta^2-4\beta^3+\beta^4) - \tfrac{d+2}{2}c_2^2(1-2\beta+\beta^2) + \tfrac{d(d+2)}{8}$$

$$= c_2^4\tfrac{1}{2}(1-\beta)^4 - c_2^2\tfrac{d+2}{2}(1-\beta)^2 + \tfrac{d(d+2)}{8}$$

$$S_2(g^2)+S_2((c_2-g)^2) = c_2^4\tfrac{1}{2}(\beta^4+(1-\beta)^4) - c_2^2\tfrac{d+2}{2}(\beta^2+(1-\beta)^2) + \tfrac{d(d+2)}{4}$$

$$\Rightarrow I = \pi^{-d}\int dc_2\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\cdot c_2)(\hat\sigma\cdot\hat c_2)|c_2|\exp(-c_2^2(\beta^2+\beta^2+1-2\beta))(1+a_2(\tfrac{d(d+2)}{4} - c_2^2\tfrac{d+2}{2}(\beta^2+(1-\beta)^2) + c_2^4\tfrac{1}{2}(\beta^4+(1-\beta)^4)))$$

$$= \pi^{-d}\underbrace{\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\cdot c_2)(\hat\sigma\cdot c_2)}_{=G(d)}\int dc_2\exp(-c_2^2\underbrace{(\beta^2+(1-\beta)^2)}_{:=\gamma})\cdot(|c_2| + a_2(\tfrac{d(d+2)}{4}|c_2| - c_2^3\tfrac{d+2}{2}\underbrace{(\beta^2+(1-\beta)^2)}_{:=\gamma} + c_2^5\cdot\tfrac{1}{2}(\beta^4+(1-\beta)^4)))$$

$$= \pi^{-d}G(d)\int dc_2\, e^{-\gamma c_2^2}(|c_2| + a_2(|c_2|\tfrac{d(d+2)}{4} - c_2^3\tfrac{d+2}{2}\gamma + c_2^5\tfrac{1}{2}(\beta^4+(1-\beta)^4))) \quad , \; \gamma = \beta^2+(1-\beta)^2$$

On doit calculer des intégrales du type $\int_{\mathbb{R}^d} d^dc_2\, e^{-\gamma c_2^2}(c_2+c_2^3+c_2^5)$ dans $\mathbb{R}^d$. On utilise une relation de l'article de Trizac:

$$\langle c_1^n\rangle_0 = \int dc_1\int dc_2\,\tilde f(c_1)\tilde f(c_2)\,c_1^n = \int dc_1\tilde f(c_1)c_1^n\cdot(\int dc_2\tilde f(c_2)) = \int dc_1\mathcal{M}(c_1)c_1^n(\int dc_2\mathcal{M}(c_2)) = \int dc_1(d/2\pi)^{d/2}e^{-dc_1^2/2}c_1^n\underbrace{(\int dc_2(d/2\pi)^{d/2}e^{-dc_2^2/2})}_{:=I_0} = \sqrt{\tfrac{2}{d}}\,\Gamma(\tfrac{d+n}{2})/\Gamma(d/2)$$

$$\Rightarrow \int dc\, e^{-dc^2/2}c_1^n = \sqrt{\tfrac{2}{d}}\,\Gamma(\tfrac{d+n}{2})/\Gamma(d/2)\cdot(\tfrac{2\pi}{d})^{d/2}\tfrac{1}{I_0} \quad ; \quad \gamma y^2 = d/2\,c^2 \Rightarrow c = \sqrt{2\gamma/d}\,y \; ; \; dc = (2\gamma/d)^{d/2}dy$$

$$\Rightarrow \int dy\,(\tfrac{2\gamma}{d})^{d/2}e^{-\gamma y^2}(\tfrac{2\gamma}{d})^{n/2}y^n = \sqrt{2/d}\,\Gamma(\tfrac{d+n}{2})/\Gamma(d/2)\,(\tfrac{2\pi}{d})^{d/2}\tfrac{1}{I_0}$$

$$\Rightarrow \int dc\, e^{-\gamma c^2}c^n = \sqrt{\tfrac{2}{d}}\,\Gamma(\tfrac{d+n}{2})/\Gamma(d/2)\,(\tfrac{2\pi}{d})^{d/2}(\tfrac{d}{2\gamma})^{\frac{d+n}{2}}I_0^{-1} = \sqrt{\tfrac{2}{d}}\,\pi^{d/2}2^{d/2-\frac{d+n}{2}}d^{\frac{d+n}{2}}d^{-d/2}\Gamma(\tfrac{d+n}{2})/\Gamma(d/2)I_0^{-1} = \sqrt{\tfrac{2}{d}}\,\pi^{d/2}2^{-n/2}d^{n/2}\Gamma(\tfrac{d+n}{2})/\Gamma(d/2)\,I_0^{-1}\gamma^{-\frac{d+n}{2}}$$

$$= 2^{1/2-n/2}\pi^{d/2}d^{-1/2+n/2}\Gamma(\tfrac{d+n}{2})/\Gamma(d/2)\,I_0^{-1}\gamma^{-\frac{d+n}{2}} = 2^{\frac{1-n}{2}}\pi^{d/2}d^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\tfrac{d+n}{2})/\Gamma(d/2)\,I_0^{-1}\tfrac{1}{\gamma^{\frac{d+n}{2}}} = (d/2)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{d/2}\Gamma(\tfrac{d+n}{2})/\Gamma(d/2)\,I_0^{-1}\gamma^{-\frac{d+n}{2}}$$

$$I_0 = (\tfrac{d}{2\pi})^{d/2}\int dc_2\, e^{-dc_2^2/2} = (\tfrac{d}{2\pi})^{d/2}(\tfrac{\pi 2}{d})^{d/2} = 1$$

$$\Rightarrow \int dc\, e^{-\gamma c^2}c^n = (\tfrac{d}{2})^{\frac{n-1}{2}}\pi^{d/2}\Gamma(\tfrac{d+n}{2})/\Gamma(d/2)\,\frac{1}{\gamma^{\frac{d+n}{2}}} := \langle z^n\rangle$$

On peut donc finalement calculer I:

$$I = \pi^{-d}G(d)\{\langle z^1\rangle + a_2\cdot(\tfrac{d(d+2)}{4}\langle z^1\rangle - \tfrac{d+2}{2}\gamma\langle z^3\rangle + \tfrac{1}{2}(\beta^4+(1-\beta)^4)\langle z^5\rangle)\}$$

$$\Rightarrow \tilde I(\tilde f,\tilde f) = G(d)\cdot[-c_1^{*}\langle c_1\rangle + \tfrac{1}{\alpha^2\pi^d}\langle z^1\rangle + \tfrac{1}{\alpha^2\pi^d}a_2(\tfrac{d(d+2)}{4}\langle z^1\rangle - \tfrac{d+2}{2}\gamma\langle z^3\rangle + \tfrac{1}{2}(\beta^4+(1-\beta)^4)\langle z^5\rangle)]$$

avec:
$$\begin{cases} c_1^{*} = \frac{1}{\pi^{d/2}}(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}) \\ \langle c_1\rangle = (1-\frac{a_2}{8})\Gamma(\frac{d+1}{2})/\Gamma(d/2) \\ \langle z^n\rangle = (\frac{d}{2})^{\frac{n-1}{2}}\pi^{d/2}\frac{1}{\gamma^{\frac{d+n}{2}}}\Gamma(\frac{d+n}{2})/\Gamma(d/2) \\ \gamma = \beta^2+(1-\beta)^2 \\ \beta = \frac{1+\alpha}{2\alpha} \quad ; \quad G(d) = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\Gamma(\frac{d+1}{2}) \end{cases}$$

$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

$= \frac{d+3}{2}\Gamma(\frac{d+3}{2}) = \frac{d+3}{2}\frac{d+1}{2}\Gamma(\frac{d+1}{2})$ $\quad = \Gamma(\frac{d+1}{2})\cdot\frac{d+1}{2}$

Simplifions et développons $\tilde I(\tilde f,\tilde f)$:

$$\tilde I(\tilde f,\tilde f) = G(d)\cdot[-\pi^{-d/2}(1+a_2\tfrac{d(d+2)}{8})(1-\tfrac{a_2}{8})\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2) + \tfrac{1}{\alpha^2\pi^d}\pi^{d/2}\gamma^{-\frac{d+1}{2}}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2) + \tfrac{1}{\alpha^2\pi^d}a_2(\tfrac{d(d+2)}{4}\pi^{d/2}\gamma^{-\frac{d+1}{2}}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2) - \tfrac{d+2}{2}\gamma\tfrac{d}{2}\pi^{\frac{d}{2}}\gamma^{-\frac{d+3}{2}}\tfrac{\Gamma(\frac{d+3}{2})}{\Gamma(d/2)}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\beta^4+(1-\beta)^4)(\tfrac{d}{2})^2\pi^{d/2}\gamma^{-\frac{d+5}{2}}\Gamma(\tfrac{d+5}{2})/\Gamma(d/2))]$$

$$= G(d)\cdot[-\pi^{-d/2}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)(1-\tfrac{a_2}{8}+\tfrac{a_2}{8}d(d+2)) + \tfrac{1}{\alpha^2}\pi^{-d/2}\gamma^{-\frac{d+1}{2}}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)$$
$$+ \tfrac{1}{\alpha^2}\pi^{-d}a_2(\tfrac{d(d+2)}{4}\pi^{d/2}\gamma^{-\frac{d+1}{2}}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2) - \tfrac{d+2}{2}\tfrac{d}{2}\pi^{d/2}\gamma^{-\frac{d+1}{2}}\tfrac{d+1}{2}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)) + \tfrac{1}{2}(\beta^4+(1-\beta)^4)(\tfrac{d}{2})^2\pi^{d/2}\gamma^{-\frac{d+1}{2}}\gamma^{-2}\tfrac{d+3}{2}\tfrac{d+1}{2}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2))]$$

$$= G(d)\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\,\pi^{-d/2}[-1+\tfrac{a_2}{8}(1-d(d+2)) + \tfrac{1}{\alpha^2}\gamma^{-\frac{d+1}{2}} + \tfrac{1}{\alpha^2}a_2(\tfrac{d(d+2)}{4}\gamma^{-\frac{d+1}{2}} - \tfrac{d(d+2)}{4}\tfrac{d+1}{2}\gamma^{-\frac{d+1}{2}} + \tfrac{1}{2}(\beta^4+(1-\beta)^4)(\tfrac{d}{2})^2\tfrac{d+1}{2}\tfrac{d+3}{2}\gamma^{-\frac{d+1}{2}}\gamma^{-2})]$$

$$= G(d)\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\,\pi^{-d/2}[\alpha^{-2}\gamma^{-\frac{d+1}{2}} - 1 + a_2\cdot\{\tfrac{1-d(d+2)}{8} + \tfrac{1}{\alpha^2}\tfrac{d(d+2)}{4}\gamma^{-\frac{d+1}{2}}(1-\tfrac{d+1}{2}) + \tfrac{1}{2\alpha^2}(\beta^4+(1-\beta)^4)\tfrac{d^2(d+1)(d+3)}{16}\gamma^{-\frac{d+1}{2}}\gamma^{-2}\}]$$

$$= G(d)\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\,\pi^{-d/2}\gamma^{-\frac{d+1}{2}}[\alpha^{-2} - \gamma^{\frac{d+1}{2}} + a_2\cdot\{\tfrac{1-d(d+2)}{8}\gamma^{\frac{d+1}{2}} + \alpha^{-2}\tfrac{d(d+2)}{4}(\tfrac{1-d}{2}) + \alpha^{-2}\gamma^{-2}(\beta^4+(1-\beta)^4)\tfrac{d^2(d+1)(d+3)}{32}\}]$$

$$\tilde I(\tilde f,\tilde f) = G(d)\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\,\pi^{-d/2}\gamma^{-\frac{d+1}{2}}[\alpha^{-2} - \gamma^{\frac{d+1}{2}} + a_2\cdot\{\tfrac{1-d(d+2)}{8}\gamma^{\frac{d+1}{2}} - \alpha^{-2}\tfrac{d(d-1)(d+2)}{8} + \alpha^{-2}\gamma^{-2}(\beta^4+(1-\beta)^4)\tfrac{d^2(d+1)(d+3)}{32}\}]$$

Extraction de a_2 et résolution de l'équation $\mu_2 = \tilde I(\tilde f,\tilde f)$:

$$\tfrac{1}{2}(1-\alpha^2)(2\pi)^{-1/2}(1+\tfrac{3}{16}a_2)\,2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2) = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\Gamma(\tfrac{d+1}{2})\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\,\pi^{-d/2}\gamma^{-\frac{d+1}{2}}[\xi_1 + a_2\xi_2]$$

$$\Rightarrow (1-\alpha^2)\tfrac{1}{\sqrt2}\pi^{\frac{d-1}{2}}\pi^{-\frac{d+1}{2}}\pi^{d/2}(1+\tfrac{3}{16}a_2) = \gamma^{-\frac{d+1}{2}}[\xi_1 + a_2\xi_2]$$

$$\Rightarrow (1-\alpha^2)\tfrac{1}{\sqrt2}\pi^{d/2} + (1-\alpha^2)\tfrac{1}{\sqrt2}\pi^{d/2}\tfrac{3}{16}a_2 = \gamma^{-\frac{d+1}{2}}\xi_1 + a_2\gamma^{-\frac{d+1}{2}}\xi_2$$

$$\Rightarrow a_2\{(1-\alpha^2)\tfrac{1}{\sqrt2}\pi^{d/2}\tfrac{3}{16} - \gamma^{-\frac{d+1}{2}}\xi_2\} = \gamma^{-\frac{d+1}{2}}\xi_1 - (1-\alpha^2)\tfrac{1}{\sqrt2}\pi^{d/2}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{\gamma^{-\frac{d+1}{2}}(\alpha^{-2}-\gamma^{\frac{d+1}{2}}) - (1-\alpha^2)\frac{1}{\sqrt2}\pi^{d/2}}{(1-\alpha^2)\frac{1}{\sqrt2}\pi^{d/2}\frac{3}{16} - \gamma^{-\frac{d+1}{2}}(\frac{1-d(d+2)}{8}\gamma^{\frac{d+1}{2}} - \alpha^{-2}\frac{d(d-1)(d+2)}{8} + \alpha^{-2}\gamma^{-2}(\beta^4+(1-\beta)^4)\frac{d^2(d+1)(d+3)}{32})}$$

$$= \frac{\alpha^{-2}\gamma^{-\frac{d+1}{2}} - 1 - (1-\alpha^2)\frac{1}{\sqrt2}\pi^{d/2}}{(1-\alpha^2)\frac{1}{\sqrt2}\pi^{d/2}\frac{3}{16} - \frac{1-d(d+2)}{8} + \alpha^{-2}\gamma^{-\frac{d+1}{2}}\frac{d(d-1)(d+2)}{8} - \alpha^{-2}\gamma^{-\frac{d+5}{2}}(\beta^4+(1-\beta)^4)\frac{d^2(d+1)(d+3)}{32}}$$

• Preuve de la non-conservation de μ pour l'annihilation probabiliste : Remise au propre. (A)

Hypothèses : $\forall t\ f(v,t) \underset{\sim}{\overset{v\to 0}{}} v^{\mu(t)}$; $\int dv\,|v|\,f(v,t) < \infty$

Argument pour l'annihilation pure :

$$\partial_t f(v,t) = -V(v,t)\cdot f(v,t)$$

$$\Rightarrow \lim_{v\to 0} \partial_t f(v,t) = -\lim_{v\to 0} V(v,t)\, f(v,t)$$

avec : $\lim_{v\to 0} V(v,t) = \lim_{v\to 0} \sigma^{d-1}\int d\hat\sigma\,(\hat\sigma\cdot\hat v_{12})\,\Theta(\hat\sigma\cdot\hat v_{12})\int dv_2\,|v_{12}|\,f(v_2,t) = C\cdot\underbrace{\int dv_2\,|v_2|\,f(v_2,t)}_{\text{comportement correct à l'origine}} = V(0,t) < \infty$ (hyp)

On fait donc l'hypothèse d'existence du premier moment de f.

comportement correct à l'origine $\Leftrightarrow \sim \int dv_2\, v_2^{d-1} v_2\, v_2^{\mu} = \int dv_2\, v_2^{d+\mu} \Rightarrow -d-\mu < 1 \Rightarrow d+\mu > -1 \Rightarrow \boxed{\mu > -d-1}$

$$\Rightarrow \partial_t V^{\mu(t)} = -V(0,t)\cdot V^{\mu(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\mu}{\partial t}\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial\mu}V^{\mu}}_{} = -V(0,t)\,V^{\mu(t)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\mu}e^{\mu\ln(v)} = \ln(v)\,e^{\mu\ln(v)} = \ln(v)\cdot V^{\mu(t)}$$

$$\Rightarrow \lim_{v\to 0}\frac{\partial\mu}{\partial t}\ln(v)\,V^{\mu(t)} = -V(0,t)\lim_{v\to 0}V^{\mu(t)}$$

$$\Rightarrow \lim_{v\to 0}\frac{\partial\mu}{\partial t}\ln(v) = -V(0,t) < \infty$$

Comme la limite de droite $V(0,t)$ est finie, il faut qu'il en soit de même pour celle de gauche, et comme $\lim_{v\to 0}\ln(v) = -\infty$, alors $\lim_{v\to 0}\frac{\partial\mu}{\partial t} = 0$, donc $\mu = \text{cte}_t$ est conservé au cours du temps. Argument pour l'annihilation probabiliste.

$$\partial_t f(v,t) = -p\cdot V(v,t)\,f(v,t) + (1-p)\underbrace{\sigma^{d-1}\int dv_2\int d\hat\sigma\,\Theta(-\hat\sigma\hat v_{ij})\,|\hat\sigma\cdot v_{ij}|\,\big(f(v_1',t)\,f(v_2',t) - f(v_1,t)\,f(v_2,t)\big)}_{:= I_c} \qquad (1)$$

$$\lim_{v_1\to 0} I_c = -\lim_{v_1\to 0}\sigma^{d-1}\,V_1^{\mu(t)}\int dv_2\int d\hat\sigma\,\Theta(-\hat\sigma\hat v_{ij})(\hat\sigma\cdot v_{ij})\,f(v_2,t) + \lim_{v_1\to 0}\sigma^{d-1}\int dv_2\int d\hat\sigma\,\Theta(-\hat\sigma\hat v_{ij})\,(\hat\sigma\, v_{ij})\,f(v_1',t)\,f(v_2',t)$$

; $v_1' = v_1 - (v_{12}\hat\sigma)\hat\sigma$, $v_2' = v_2 + (v_{12}\hat\sigma)\hat\sigma$

$$= \underbrace{+\sigma^{d-1}\lim_{v_1\to 0}V_1^{\mu(t)}\underbrace{\int d\hat\sigma\,\Theta(+\hat\sigma\hat v_2)\,\hat\sigma\,\hat v_2}_{=C(d)<\infty}\underbrace{\int dv_2\,|v_2|\,f(v_2,t)}_{<\infty}}_{=+\lim_{v_1\to 0}V_1^{\mu(t)}\,V(0,t)} - \lim_{v_1\to 0}\sigma^{d-1}\int dv_2\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat\sigma\hat v_2)(\hat\sigma\cdot v_2)\underbrace{f\big((v_2\hat\sigma)\hat\sigma\big)\,f\big(v_2-(v_2\hat\sigma)\hat\sigma\big)}_{=f(|v_2\hat\sigma|)\cdot f(v_2-(v_2\hat\sigma))}$$

$$= \lim_{v_1\to 0}V_1^{\mu(t)}\,V(0,t) - \lim_{v_1\to 0}\sigma^{d-1}\underbrace{\int dv_2\int d\hat\sigma\,\Theta(\hat v_2\cdot\hat\sigma)\,(\hat\sigma\cdot\hat v_2)\cdot|v_2|\,f(|v_2\hat\sigma|)\,f(v_2-(v_2\hat\sigma))}$$

cette intégrale doit être finie. En effet, si ce n'est pas le cas, alors il y a un terme infini dans le membre de droite de (1), donc μ n'est pas conservé. Par une analyse dimensionnelle : $v_2\to 0$

$$\sim \int dv_2\,|v_2|\,(v_2\cdot\hat\sigma)^{\mu(t)}\,v_2^{\mu(t)}\,(\hat v_2 - \hat v_2\hat\sigma)^{\mu(t)}$$

$$\sim \int dv_2\,|v_2|^{d-1}\,|v_2|^{1}\,|v_2|^{2\mu(t)}$$

$$\sim \int dv_2\,|v_2|^{d+2\mu(t)}$$

Convergence $\overset{v_2\to 0}{\Rightarrow} -d-2\mu(t) < 1 \Rightarrow d+2\mu(t) > -1 \Rightarrow \boxed{\mu(t) > -\frac{d+1}{2}}$

(on ne sait à priori rien sur le comportement de f pour $v_2\to\infty$, si ce n'est l'intégrabilité supposée, donc on ne peut pas mettre de borne. Néanmoins, comme le premier moment de f est supposé fini, alors cela implique automatiquement que l'intégrale ci-dessus se comporte correctement pour $v_2\to\infty$.)

Sous cette condition, on a :

$$\lim_{v\to 0}\partial_t V^{\mu(t)} = V(0,t)\cdot(-p+1-p)\lim_{v\to 0}V^{\mu(t)} - (1-p)\,F(\mu(t)) \quad <\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{v\to 0}\frac{\partial\mu}{\partial t}\ln(v)\,V^{\mu(t)} = (1-2p)\,V(0,t)\lim_{v\to 0}V^{\mu(t)} - (1-p)\,F(\mu(t))$$

$$\Rightarrow \lim_{v\to 0}\frac{\partial\mu}{\partial t}\ln(v) = (1-2p)\,V(0,t) - (1-p)\lim_{v\to 0}\frac{F(\mu(t))}{V^{\mu(t)}} \quad ;\ F(\mu(t)) \sim \int dv_2\,|v_2|^{d+2\mu(t)} < \infty \Leftrightarrow \mu(t) > -\frac{d+1}{2}$$

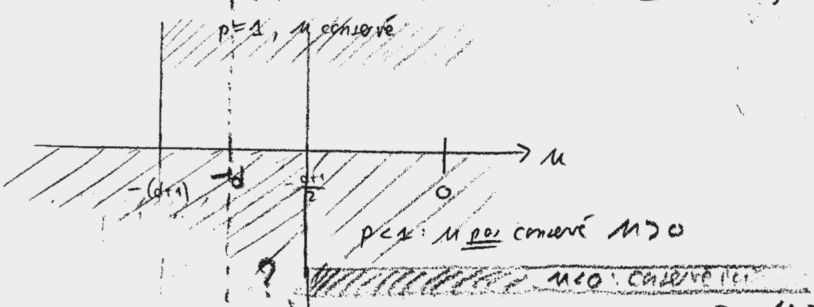
Supposons que $F(\mu(t)) < \infty$, alors $\left|\lim_{v\to 0}F(\mu(t))/V^{\mu(t)}\right| = \infty$, de sorte que dans ce cas $\lim_{v\to 0}\frac{\partial\mu}{\partial t}\ln(v) = \infty$ et donc $\mu = \mu(t)$ n'est pas conservé. Par contre, si $F(\mu(t)) = 0$, si $\lim_{v\to 0}F(\mu(t))/V^{\mu(t)} = \text{cte} < \infty$ on a $\lim_{v\to 0}\frac{\partial\mu}{\partial t}\ln(v) = \text{cte}$ et donc μ est conservé.

En conclusion : sous les hypothèses $\forall t\ f(v,t) \overset{v\to 0}{\sim} v^{\mu(t)}$; $\int dv\,|v|\,f(v,t) < \infty$

$p = 1$: • μ conservé $\Leftrightarrow \mu > -(d+1)$

$p < 1$: • μ pas conservé $\Leftarrow \mu < -\frac{d+1}{2}$ (car $F(\mu(t)) = \text{cte} < \infty$, donc $\lim_{v\to 0}\frac{F(\mu(t))}{V^{\mu(t)}} = \infty \Rightarrow \frac{\partial\mu}{\partial t} \neq 0$)

• si $\mu > -\frac{d+1}{2}$ ~~seule possibilité~~ pour avoir $\lim\frac{F(\mu(t))}{V^{\mu(t)}} = 0$ (donc conservation de μ) c'est $F(\mu(t)) = 0$, ce qui est impossible car $F(\mu(t)) \sim \int dv_2\,|v_2|^{d+2\mu(t)} \Rightarrow \{\mu > -\frac{d+1}{2} \Rightarrow \mu$ pas conservé$\}$.



Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} p=1:\ \mu \text{ conservé} \\ p<1:\ \mu \text{ pas conservé} \end{array}}$ si $\mu>0$

$\mu > 0 \Rightarrow \mu = \mu(t)$

$\mu < 0 \Rightarrow \{\mu > -\frac{d+?}{2} \Leftrightarrow \mu$ conservé $?$

$p < 1$:

numériquement ? ...

• Corrections à (8)

$$g^2 = \beta^2 c_2^2 \cos^2\theta$$
$$c_2 \cdot g = \beta c_2^2 \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow I = \int dc_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot c_2)(\hat{\sigma}\cdot c_2)\, |c_2|\, \pi^{-d} \exp\left(-2\beta^2 c_2^2 \cos^2\theta - c_2^2 + 2\beta c_2^2 \cos\theta\right) \left\{ 1 + a_2 \cdot \left(S_2(g^2) + S_2((c_2-g)^2)\right)\right\}$$

$$S_2(g^2) = 1/2\, g^4 - \frac{d+2}{2} g^2 + \frac{d(d+2)}{8} = \frac{1}{2}\beta^4 c_2^4 \cos^4\theta - \frac{d+2}{2}\beta^2 c_2^2 \cos^2\theta + \frac{d(d+2)}{8}$$

$$S_2((c_2-g)^2) = \frac{1}{2}(c_2-g)^4 - \frac{d+2}{2}(c_2-g)^2 + \frac{d(d+2)}{8} = \frac{1}{2}\left(c_2^4 - 4c_2^2(c_2\cdot g) + 6\, c_2^2 g^2 - 4g^2(c_2\cdot g) + g^4\right) - \frac{d+2}{2}\left(c_2^2 + g^2 - 2c_2\cdot g\right) + \frac{d(d+2)}{8}$$
$$= \frac{1}{2}\left(c_2^4 - 4c_2^4\beta\cos\theta + 6c_2^4\beta^2\cos^2\theta - 4\beta^2 c_2^2\cos^2\theta\, \beta c_2^2\cos\theta + \beta^4 c_2^4\cos^4\theta\right) - \frac{d+2}{2}\left(c_2^2 + c_2^2\beta^2\cos^2\theta - 2\beta c_2^2\cos\theta\right) + \frac{d(d+2)}{8}$$
$$= \frac{1}{2} c_2^4\left(1 - 4\beta\cos\theta + 6\beta^2\cos^2\theta - 4\beta^3\cos^3\theta + \beta^4\cos^4\theta\right) - \frac{d+2}{2} c_2^2\left(1 + \beta^2\cos^2\theta - 2\beta\cos\theta\right) + \frac{d(d+2)}{8}$$
$$= \frac{1}{2} c_2^4 (1-\beta\cos\theta)^4 - \frac{d+2}{2} c_2^2 (1-\beta\cos\theta)^2 + \frac{d(d+2)}{8}$$

$$S_2(g^2) + S_2((c_2-g)^2) = \frac{1}{2} c_2^4\left(\beta^4\cos^4\theta + (1-\beta\cos\theta)^4\right) - \frac{d+2}{2} c_2^2\left(\beta^2\cos^2\theta + (1-\beta\cos\theta)^2\right) + \frac{d(d+2)}{8}$$

$$\Rightarrow I = \int dc_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot c_2) \underbrace{(\hat{\sigma}\cdot c_2)}_{=|c_2|\cdot\cos\theta} |c_2|\, \pi^{-d} \exp\Big(-c_2^2 \underbrace{\left(1 + 2\beta^2\cos^2\theta - 2\beta\cos\theta\right)}_{=\beta^2\cos^2\theta + (1-\beta\cos\theta)^2}\Big) \left\{ 1 + a_2\left(\frac{1}{2}c_2^4\left(\beta^4\cos^4\theta + (1-\beta\cos\theta)^4\right) - \frac{d+2}{2}c_2^2\left(\beta^2\cos^2\theta + (1-\beta\cos\theta)^2\right) + \frac{d(d+2)}{8}\right)\right\}$$

Le problème à résoudre est maintenant de calculer des intégrales du type:

$$\int dc_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot c_2)(\hat{\sigma}\cdot c_2)^\ell |c_2|^k \exp(-c_2^2)\exp\left(-c_2^2\beta\cos\theta(\beta\cos\theta - 1)\right) = \int dc_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot \hat{c}_2) \cos\theta^\ell |c_2|^k e^{-c_2^2} e^{-c_2^2\beta\cos\theta(\beta\cos\theta-1)} \quad , \forall \ell \leq k,\ \ell \geq 1$$

Si possible, il faudrait pour se simplifier les calculs, pouvoir utiliser la relation:

$$\int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot c_2)(\hat{\sigma}\cdot \hat{c}_2)^n = \pi^{\frac{d-1}{2}}\, \Gamma\!\left(\tfrac{n+1}{2}\right) / \Gamma\!\left(\tfrac{n+d}{2}\right)$$

Mais la présence de $\beta\cos\theta(\beta\cos\theta-1)$ dans l'exponentielle ne semble empêcher l'obtention d'une formule analytique. En effet, en utilisant

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx^d\, e^{-\alpha x^2} x^k = (d/2)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\pi^{d/2}}{\alpha^{\frac{d+k}{2}}}\, \Gamma\!\left(\tfrac{n+k}{2}\right) / \Gamma(n/2)$$

$$\Rightarrow \int dc_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot\hat{c}_2) \cos\theta^\ell |c_2|^k e^{-c_2^2(1-\beta\cos\theta(\beta\cos\theta-1))} = \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot c_2) \cos\theta^\ell \int dc_2\, |c_2|^k e^{-c_2^2(1-\beta\cos\theta(\beta\cos\theta-1))}$$
$$= \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot c_2)\cos\theta^\ell \left(\tfrac{d}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}} \pi^{d/2} \left(1 - \beta\cos\theta(\beta\cos\theta-1)\right)^{-\frac{d+k}{2}} \Gamma\!\left(\tfrac{n+k}{2}\right)/\Gamma(n/2)$$
$$= \left(\tfrac{d}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}} \pi^{d/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)}{\Gamma(n/2)} \underbrace{\int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot \hat{c}_2) \frac{\cos\theta^\ell}{\left(1-\beta\cos\theta(\beta\cos\theta-1)\right)^{-\frac{d+k}{2}}}} \quad ; \beta = \frac{1+\alpha}{2\alpha}$$

ne peut pas être calculé analytiquement, peut être être numériquement pour les valeurs de ℓ et k qui nous intéressent, mais pas $\forall d$!

Conclusion: $\nexists$ sol. analytique, et $\lim\limits_{c_1\to 0} I(\bar{f},\bar{f})$ ne peut pas être calculé, et donc on doit oublier les résultats.

• Autre démarche pour (8): on choisit une direction privilégiée: $c_2 \cdot \hat{\sigma} = |c_{2,1}|$, ainsi:

$$g^2 = \left(\tfrac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 c_{2,1}^2 =: \beta^2 c_{2,1}^2 \quad ; \quad c_2\cdot g = \beta c_{2,1}^2 \quad ; \quad \beta = \tfrac{1+\alpha}{2\alpha} \in [1,\infty[\quad ; \quad c_{2,1} \in [0,\infty[\ \text{(à cause de } \theta(\hat{\sigma}\cdot c_2))$$

$$\Rightarrow I = \int dc_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot c_2)(\hat{\sigma}\cdot c_2)\, |c_2|\, \pi^{-d}\exp\left(-2\beta^2 c_{2,1}^2 - c_2^2 + 2\beta c_{2,1}^2\right)\left\{1 + a_2\left(S_2(g^2) + S_2((c_2-g)^2)\right)\right\}$$

$$S_2(g^2) = 1/2\, g^4 - \frac{d+2}{2} g^2 + \frac{d(d+2)}{8} = \frac{1}{2}\beta^4 c_{2,1}^4 - \frac{d+2}{2}\beta^2 c_{2,1}^2 + \frac{d(d+2)}{8}$$

$$S_2((c_2-g)^2) = \frac{1}{2}\left(c_2^4 - 4c_2^2(c_2\cdot g) + 6c_2^2 g^2 - 4g^2(c_2\cdot g) + g^4\right) - \frac{d+2}{2}\left(c_2^2 + g^2 - 2c_2\cdot g\right) + \frac{d(d+2)}{8}$$
$$= \frac{1}{2}\left(c_2^4 - 4c_2^2\beta c_{2,1}^2 + 6c_2^2\beta^2 c_{2,1}^2 - 4\beta^2 c_{2,1}^2 \beta c_{2,1}^2 + \beta^4 c_{2,1}^4\right) - \frac{d+2}{2}\left(c_2^2 + \beta^2 c_{2,1}^2 - 2\beta c_{2,1}^2\right) + \frac{d(d+2)}{8}$$
$$= \frac{1}{2}\left(c_2^4 + c_2^2 c_{2,1}^2\beta(-4+6\beta) + c_{2,1}^4\beta^3(-4+\beta)\right) - \frac{d+2}{2}\left(c_2^2 + \beta c_{2,1}^2(-2+\beta)\right) + \frac{d(d+2)}{8}$$

$$S_2(g^2) + S_2((c_2-g)^2) = 1/2\left(c_2^4 + c_2^2 c_{2,1}^2\beta(6\beta-4) + c_{2,1}^4\beta^3(\beta-4+\beta)\right) - \frac{d+2}{2}\left(c_2^2 + \beta c_{2,1}^2(\beta-2+\beta)\right) + \frac{d(d+2)}{4}$$
$$= 1/2\left(c_2^4 + c_2^2 c_{2,1}^2\beta(6\beta-4) + 2\beta^3 c_{2,1}^4(\beta-2)\right) - \frac{d+2}{2}\left(c_2^2 + 2\beta c_{2,1}^2(\beta-1)\right) + \frac{d(d+2)}{4}$$

$$\Rightarrow I = \int dc_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot c_2)(\hat{\sigma}\cdot \hat{c}_2)\, |c_2|\, \pi^{-d}\exp\left(-c_2^2 - 2\beta c_{2,1}^2(\beta-1)\right)\left\{1 + a_2\cdot\left(\frac{1}{2}\left(c_2^4 + c_2^2 c_{2,1}^2\beta(6\beta-4) + 2\beta^3 c_{2,1}^4(\beta-2)\right) - \frac{d+2}{2}\left(c_2^2 + 2\beta c_{2,1}^2(\beta-1)\right) + \frac{d(d+2)}{4}\right)\right\}$$
$$= \pi^{-d} \underbrace{\int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot c_2)(\hat{\sigma}\cdot \hat{c}_2)}_{=\beta_1 = G(d)} \int_{c_{2,1}>0} dc_2\, e^{-c_2^2 - 2\beta c_{2,1}^2(\beta-1)}\left\{|c_2| + a_2\left(\frac{1}{2}\left(c_2^5 + c_2^3 c_{2,1}^2\beta(6\beta-4) + 2\beta^3 c_2 c_{2,1}^4(\beta-2)\right) - \frac{d+2}{2}\left(c_2^3 + 2\beta c_2 c_{2,1}^2(\beta-1)\right) + c_2\frac{d(d+2)}{4}\right)\right\}$$
$$= \pi^{-d} G(d) \int_{c_{2,1}>0} dc_2 \exp\left(-c_2^2 - 2\beta c_{2,1}^2(\beta-1)\right)\left\{|c_2| + a_2\left(\frac{1}{2}\left(c_2^5 + c_2^3 c_{2,1}^2\beta(6\beta-4) + 2\beta^3 c_2 c_{2,1}^4(\beta-2)\right) - \frac{d+2}{2}\left(c_2^3 + 2\beta c_2 c_{2,1}^2(\beta-1)\right) + c_2\frac{d(d+2)}{4}\right)\right\}$$

Il faut pouvoir calculer des intégrales du type: $\int_{x_1>0} dx\, e^{-x^2 - Ax_1^2} X^k X_1^\ell$ $\forall k, \ell \geq 0$ (k impair, ℓ pair), $x \in \mathbb{R}^d$. Supposons cette intégrale connue, notée $I^A_{k\ell}$, alors (avec $A = 2\beta(\beta-1) > 0$)

$$I = \pi^{-d} G(d)\left\{ I^A_{1,0} + a_2\left(\frac{1}{2}\left(I^A_{5,0} + \beta(6\beta-4) I^A_{3,2} + 2\beta^3(\beta-2) I^A_{1,4}\right) - \frac{d+2}{2}\left(I^A_{3,0} + 2\beta(\beta-1) I^A_{1,2}\right) + \frac{d(d+2)}{4} I^A_{1,0}\right)\right\}$$
$$= \pi^{-d} G(d)\left\{ I^A_{1,0} + a_2\left(\frac{1}{2} I^A_{5,0} + \frac{\beta(6\beta-4)}{2} I^A_{3,2} + \beta^3(\beta-2) I^A_{1,4} - \frac{d+2}{2}\left(I^A_{3,0} + 2\beta(\beta-1) I^A_{1,2}\right) + \frac{d(d+2)}{4} I^A_{1,0}\right)\right\}$$

• Suite de (8), sans sortir le terme de gain:

$$\lim_{c_1\to 0} I(\bar{f},\bar{f}) = \frac{1}{\alpha^2} I - c_1^{\wedge} G(d) \int dc_2\, |c_2|\, \bar{f}(c_2) = \frac{1}{\alpha^2} I - c_1^{\wedge} G(d) \int dc_2\, |c_2|\, \mathcal{M}(c_2)\left(1 + a_2 S_2(c_2^2)\right)$$
$$= \frac{1}{\alpha^2} I - c_1^{\wedge} G(d) \int dc_2\, |c_2|\, \pi^{-d/2} e^{-c_2^2}\left(1 + a_2\left(1/2\, c_2^4 - \frac{d+2}{2} c_2^2 + \frac{d(d+2)}{8}\right)\right) \quad , \quad c_1^{\wedge} = \pi^{-d/2}\left(1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)$$
$$= \frac{1}{\alpha^2} I - G(d) \int dc_2\, |c_2|\, e^{-c_2^2}\, \pi^{-d} \underbrace{\left(1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\left(1 + a_2\left(1/2\, c_2^4 - \frac{d+2}{2} c_2^2 + \frac{d(d+2)}{8}\right)\right)}$$
$$= 1 + a_2\left(\frac{1}{2}c_2^4 - \frac{d+2}{2}c_2^2 + \frac{d(d+2)}{8}\right) + a_2\frac{d(d+2)}{8} + O(a_2^2)$$
$$= \frac{1}{\alpha^2} I - G(d) \int dc_2\, |c_2|\, e^{-c_2^2}\, \pi^{-d}\left(1 + a_2\left(\frac{1}{2}c_2^4 - \frac{d+2}{2}c_2^2 + \frac{d(d+2)}{4}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\alpha^2} I - G(d)\, \pi^{-d} \int dc_2\, e^{-c_2^2}\left(|c_2| + a_2\left(\frac{1}{2}c_2^5 - \frac{d+2}{2}c_2^3 + \frac{d(d+2)}{4}c_2\right)\right)$$

Il semblerait que les termes ne se simplifient à priori pas de façon explicite, et donc qu'il ne soit pas nécessaire de séparer ces deux termes.

Calcul de I: $\alpha \neq 1$ si on veut exploiter les résultats de Noije, mais $\alpha = 1$ pour notre calcul d'annihilation probabiliste. Même si $A \neq 0$, cette intégrale ne se calcule pas analytiquement. Par contre, si $A=0$ elle se calcule numériquement ? Non ! Car d = dimension du problème, variable... On ne peut pas faire l'intégration si d n'est pas connu et fixé...

• Calcul des exposants de déclin $\boxed{a_2 + \alpha_e}$ par intégration de l'équation de Boltzmann sur c_1, comme le terme de collision ne contribue pas à la perte de particules, on a :

$$\frac{dn}{dt} = -p \cdot \omega(t) \cdot n$$

donc il suffit de redéfinir $\omega := p\cdot\omega$; $\omega_0 := p\cdot\omega_0$ de sorte à avoir exactement les mêmes expressions que pour l'annihilation pure, et reprendre les mêmes résultats :

$$\frac{n}{n_0} = \left(1 + \frac{1+\alpha_e}{2}\omega_0 \cdot p \cdot t\right)^{-\frac{2}{1+\alpha_e}} \qquad \frac{v}{v_0} = \left(1 + \frac{1+\alpha_e}{2}\omega_0\, p\cdot t\right)^{-\frac{1-\alpha_e}{1+\alpha_e}}$$

⚠ ici $\alpha_e \neq \alpha$, α_e est la perte d'énergie

Les collisions inélastiques ont pour seul effet de changer l'échelle de temps du processus, mais la physique reste essentiellement la même. De plus, ces expressions sont bien définies dans la limite $p \to 1$ (annihilation pure) et $p \to 0$ (pas d'annihilation).

Il faut encore calculer α_e pour l'annihilation balistique probabiliste, Pour $\alpha \neq 1$: (on pourra toujours faire ensuite la limite $\alpha = 1$)

$$\alpha_e = 1 + \frac{2}{k}\left(\langle c_{12} c_1^k\rangle / \langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle - 1\right) + \frac{1-p}{p}\frac{1}{\beta(d)}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle}\mu_k \quad ; \quad \beta(d) = \beta_1 = \pi^{\frac{d-1}{2}} / \Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right) \qquad (*)$$

On va devoir calculer α_e pour $k=2$ et pour $k=4$. En effet, si $\alpha = 1$ $\mu_2 = 0$, donc dans cette limite la première contribution non nulle sera $k=4$.

On va faire tous les calculs dans la notation de Noije.

$$\begin{aligned}
\langle c_{12}^n\rangle_0^{\text{Trizac}} &= \int dc_1 \int dc_2\, c_{12}^n \left(\tfrac{d}{2\pi}\right)^{d/2} e^{-d/2\, c_1^2}\left(\tfrac{d}{2\pi}\right)^{d/2} e^{-d/2\, c_2^2} \quad ; \; y^2 = \tfrac{d}{2}c^2 \; ; \; c = \sqrt{2/d}\, y \; ; \; dc = (2/d)^{d/2} dy \\
&= \int dy_1 \int dy_2 \left(\tfrac{2}{d}\right)^{d/2}\left(\tfrac{2}{d}\right)^{d/2}\left(\tfrac{2}{d}\right)^{n/2}\left(\tfrac{d}{2\pi}\right)^{d/2} e^{-y_1^2}\left(\tfrac{d}{2\pi}\right) e^{-y_2^2}\, y_{12}^n \\
&= \left(\tfrac{2}{d}\right)^{n/2} \int dy_1 \int dy_2\, y_{12}^n \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-y_1^2}\frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-y_2^2} \\
&= \left(\tfrac{2}{d}\right)^{n/2} \langle c_{12}^n\rangle_0^{\text{Noije}}
\end{aligned}$$

Ainsi toutes les grandeurs dans (*) vont faire apparaître les moyennes $\langle\ldots\rangle^{\text{Noije}}$ que l'on exprime en fonction de celles connues $\langle\ldots\rangle^{\text{Trizac}}$. On a :

$$\mu_2 = \frac{1}{2}(1-\alpha^2)\frac{\Omega_d}{\sqrt{2\pi}}\left(1 + \frac{3}{16}a_2\right) \quad ; \; \Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$$

$$\mu_4 = 2\frac{\Omega_d}{\sqrt{2\pi}}(T_1 + a_2 T_2) \quad ; \; T_1 = \frac{1}{4}(1-\alpha^2)(d + 3/2 + \alpha^2) \; ; \; T_2 = \frac{3}{128}(1-\alpha^2)(10d + 39 + 10\alpha^2) + \frac{1}{4}(1+\alpha)(d-1)$$

Or μ_2 et μ_4 dépendent de a_2, donc il faut d'abord calculer a_2. Pour cela on a besoin d'une équation supplémentaire. On prend la définition de α_e pour $\alpha = 1$: $\alpha_e = \langle c_{12} c_1^2\rangle / \langle c_{12}\rangle\langle c_1^2\rangle$. Dans ce cas on voit qu'on va partout devoir poser $\alpha = 1$, en particulier $\mu_2 = 0$ et $T_1 = 0$, ce qui donne :

$$\boxed{\frac{\langle c_{12} c_1^2\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^2\rangle} = 1 + \frac{2}{k}\left(\frac{\langle c_{12} c_1^k\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle} - 1\right) + \frac{1-p}{p}\frac{1}{\beta(d)}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^k\rangle}\mu_k} \qquad (**)$$

Le programme est donc bien défini : i) résoudre (**) pour $k=4$, avec $\mu_4 = {}^{\Omega_d}/\sqrt{2\pi}\; a_2 \cdot T_2$, et en tirer a_2. ii) Injecter le a_2 trouvé dans (*) pour trouver $\alpha_e(p)$ de l'annihilation probabiliste avec $\alpha = 1$. Moments :

$$\langle c_{12}\rangle = (d/2)^{1/2}\langle c_{12}\rangle^{\text{Trizac}} = \sqrt{d/2}\left(1 - \tfrac{1}{16}a_2\right)\langle c_{12}\rangle_0^{\text{Trizac}} = \sqrt{d/2}\left(1 - \tfrac{1}{16}a_2\right)\cdot\tfrac{1}{\sqrt{d}}\, 2\, \Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2) = \left(1 - \tfrac{1}{16}a_2\right)\sqrt{2}\,\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)$$

$$\langle c_1^k\rangle = \left(\tfrac{d}{2}\right)^{k/2}\langle c_1^k\rangle^{\text{Trizac}} = \left(\tfrac{d}{2}\right)^{k/2}\left(1 + \tfrac{a_2}{8}k(k-2)\right)\langle c_1^k\rangle_0^{\text{Trizac}} = \left(\tfrac{d}{2}\right)^{k/2}\left(1 + \tfrac{a_2}{8}k(k-2)\right)\sqrt{\tfrac{2}{d}}\,\Gamma\left(\tfrac{d+k}{2}\right)/\Gamma(d/2) = \left(1 + a_2\tfrac{k(k-2)}{8}\right)\left(\tfrac{d}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(\tfrac{d+k}{2}\right)/\Gamma(d/2)$$

$$\frac{\langle c_{12} c_1^2\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^2\rangle} = 1 + \frac{1}{2d} + \frac{a_2}{8}\left(2 + \frac{3}{d}\right)$$

Il faut encore construire le moment $\langle c_{12} c_1^4\rangle$ qui n'est pas dans le formulaire de Trizac. Avec : $c_1 = c + c_{12}$, $c_2 = c - c_{12}$:

NON
erreur de déf de c et c_{12}

$$\begin{aligned}
c_{12} c_1^4 &= \tfrac{1}{2}c_{12}(c_1^4 + c_2^4) = \tfrac{1}{2}c_{12}\left((c + c_{12})^4 + (c - c_{12})^4\right) = \tfrac{1}{2}c_{12}\left(c^4 + c_{12}^4 + \cancel{4c^3 c_{12}} + 6c^2c_{12}^2 + \cancel{4c\,c_{12}^3} + c^4 + c_{12}^4 - \cancel{4c^3c_{12}} + 6c^2c_{12}^2 - \cancel{4c\,c_{12}^3}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}c_{12}\left(2c^4 + 2c_{12}^4 + 12c^2c_{12}^2\right) = c_{12}c^4 + c_{12}^5 + 6c^2c_{12}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \langle c_{12} c_1^4\rangle &= \langle c_{12}c^4\rangle + \langle c_{12}^5\rangle + 6\langle c^2 c_{12}^3\rangle \\
&= \left(\tfrac{d}{2}\right)^{5/2}\langle c_{12}c^4\rangle^{\text{Trizac}} + \left(\tfrac{d}{2}\right)^{5/2}\langle c_{12}^5\rangle^{\text{Trizac}} + \left(\tfrac{d}{2}\right)^{5/2} 6\langle c^2 c_{12}^3\rangle^{\text{Trizac}} \\
&= \left(\tfrac{d}{2}\right)^{5/2}\Big\{\langle c_{12}c^4\rangle_0^{\text{Trizac}}\cdot\left(1 + a_2\tfrac{1}{16d}\{d\cdot(1+16) - 2d(1+4) + 2\cdot1\cdot4(d+2)\}\right) + \langle c_{12}^5\rangle_0^{\text{Trizac}}\left(1 + a_2\tfrac{1}{16d}\{d\cdot(25+0) - 2d(5+0) + 0\}\right) \\
&\qquad + 6\langle c_{12}^3c^2\rangle_0^{\text{Trizac}}\left(1 + a_2\tfrac{1}{16d}\{d(9+4) - 2d(3+2) + 2\cdot3\cdot2\cdot(d+2)\}\right)\Big\} \\
&= \left(\tfrac{d}{2}\right)^{5/2}\Big[\langle c_{12}c^4\rangle_0^{\text{Trizac}}\left(1 + a_2\tfrac{1}{16d}(17d - 10d + 8d + 16)\right) + \langle c_{12}^5\rangle_0^{\text{Trizac}}\left(1 + a_2\tfrac{1}{16d}\{25d - 10d\}\right) + 6\langle c_{12}^3c^2\rangle_0^{\text{Trizac}}\left(1 + a_2\tfrac{1}{16d}\{13d - 10d + 12d + 24\}\right)\Big] \\
&= \left(\tfrac{d}{2}\right)^{5/2}\Big[\langle c_{12}c^4\rangle_0^{Tr}\left(1 + a_2\tfrac{1}{16d}(15d + 16)\right) + \langle c_{12}^5\rangle_0^{Tr}\left(1 + a_2\tfrac{1}{16d}15d\right) + 6\langle c_{12}^3c^2\rangle_0^{\text{Trizac}}\left(1 + a_2\tfrac{1}{16d}(15d + 24)\right)\Big] \\
&= \left(\tfrac{d}{2}\right)^{5/2}\Big[\langle c_{12}c^4\rangle_0^{Tr}\left(1 + a_2\left(\tfrac{15}{16} + \tfrac{1}{d}\right)\right) + \langle c_{12}^5\rangle_0^{Tr}\left(1 + a_2\tfrac{15}{16}\right) + 6\langle c_{12}^3c^2\rangle_0^{Tr}\left(1 + a_2\left(\tfrac{15}{16} + \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{d}\right)\right)\Big] \\
&= \left(\tfrac{d}{2}\right)^{5/2}\Big[\underbrace{\langle c_{12}c^4\rangle_0^{Tr} + \langle c_{12}^5\rangle_0^{Tr} + 6\langle c_{12}^3c^2\rangle_0^{Tr}}_{= d^{-\frac{1+4}{2}}2^1\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+4}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2} + d^{-5/2}2^5\frac{\Gamma\left(\frac{d+5}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} + 6d^{-5/2}2^3\frac{\Gamma\left(\frac{d+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2}} + a_2\Big\{\tfrac{15}{16}\left(\langle c_{12}c^4\rangle_0^{Tr} + \langle c_{12}^5\rangle_0^{Tr} + 6\langle c_{12}^3c^2\rangle_0^{Tr}\right) + \tfrac{1}{d}\langle c_{12}c^4\rangle_0^{Tr} + \tfrac{1}{d}9\langle c_{12}^3c^2\rangle_0^{Tr}\Big\}\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle &= \left(\tfrac{d}{2}\right)^{5/2}\left[\left(1 - a_2\tfrac{1}{16}\right)\langle c_{12}\rangle_0^{Tr}\left(1 + a_2\tfrac{4(4-2)}{8}\right)\langle c_1^4\rangle_0^{Tr}\right] \\
&= \left(\tfrac{d}{2}\right)^{5/2}\left[\langle c_{12}\rangle_0^{Tr}\langle c_1^4\rangle_0^{Tr}\left(1 + a_2\tfrac{4(4-2)}{8} - a_2\tfrac{1}{16}\right)\right] \\
&= \left(\tfrac{d}{2}\right)^{5/2}\langle c_{12}\rangle_0^{Tr}\langle c_1^4\rangle_0^{Tr}\left(1 + a_2(1 - 1/16)\right) \\
&= \left(\tfrac{d}{2}\right)^{5/2}\langle c_{12}\rangle_0^{Tr}\langle c_1^4\rangle_0^{Tr}\left(1 + a_2\tfrac{15}{16}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l}
\alpha + \beta a_2 & \gamma + \delta a_2 \\
\hline
\cancel{\alpha} + \beta a_2 - \cancel{\alpha} - \delta\frac{\alpha}{\gamma}a_2 & \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\left(\beta - \delta\frac{\alpha}{\gamma}\right)a_2 \\
= \left(\beta - \delta\frac{\alpha}{\gamma}\right)a_2 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\langle c_{12}c_1^4\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle} &= \frac{\alpha + \beta a_2}{\gamma + \delta a_2} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\left(\beta - \delta\frac{\alpha}{\gamma}\right)a_2 + O(a_2^2) \\
&= \underbrace{\frac{\langle c_{12}c^4\rangle_0^{Tr} + \langle c_{12}^5\rangle_0^{Tr} + 6\langle c_{12}^3c^2\rangle_0^{Tr}}{\langle c_{12}\rangle_0^{Tr}\langle c_1^4\rangle_0^{Tr}}}_{:= \xi} + \frac{1}{\langle c_{12}\rangle_0^{Tr}\langle c_1^4\rangle_0^{Tr}}\Bigg(\tfrac{15}{16}\left(\langle c_{12}c^4\rangle_0^{Tr} + \langle c_{12}^5\rangle_0^{Tr} + 6\langle c_{12}^3c^2\rangle_0^{Tr}\right) + \tfrac{1}{d}\langle c_{12}c^4\rangle_0^{Tr} + \tfrac{1}{d}9\langle c_{12}^3c^2\rangle_0^{Tr} \\
&\qquad - \frac{\cancel{\langle c_{12}\rangle_0^{Tr}\langle c_1^4\rangle_0^{Tr}}}{\cancel{\langle c_{12}\rangle_0^{Tr}\langle c_1^4\rangle_0^{Tr}}}\tfrac{15}{16}\left(\langle c_{12}c^4\rangle_0^{Tr} + \langle c_{12}^5\rangle_0^{Tr} + 6\langle c_{12}^3c^2\rangle_0^{Tr}\right)\Bigg)a_2 \\
&= \xi + a_2\cdot\left(\cancel{\tfrac{15}{16}\xi} + \tfrac{1}{d}\frac{\langle c_{12}c^4\rangle_0^{Tr} + 9\langle c_{12}^2c^2\rangle_0^{Tr}}{\langle c_{12}\rangle_0^{Tr}\langle c_1^4\rangle_0^{Tr}} - \cancel{\tfrac{15}{16}\xi}\right) \\
&= \xi + a_2\underbrace{\tfrac{1}{d}\left(\langle c_{12}c^4\rangle_0^{Tr} + 9\langle c_{12}^3c^2\rangle_0^{Tr}\right)/\langle c_{12}\rangle_0^{Tr}\langle c_1^4\rangle_0^{Tr}}_{:= \xi'}
\end{aligned}$$

$$= \langle c_{12}\rangle_0^{Tr}\langle c_1^4\rangle_0^{Tr}$$

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{d^{5/2}\cancel{\Gamma(d/2)}}\left(2\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{d+4}{2}\right)/\Gamma(d/2) + 2^5\Gamma\left(\tfrac{d+5}{2}\right) + 3\cdot2^4\Gamma\left(\tfrac{d+3}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{d+2}{2}\right)/\Gamma(d/2)\right) \Big/ \left(d^{-1/2}\,2\,\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)\cdot\sqrt{\tfrac{2}{d}}\,\Gamma\left(\tfrac{d+4}{2}\right)/\Gamma(d/2)\right) \\
&= \frac{1}{d^{5/2}}\;\frac{2\,\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)\cdot\frac{d+2}{2}/\Gamma(d/2) + 2^5\cdot\Gamma\left(\frac{d+3}{2}\right)\frac{d+3}{2} + 3\cdot2^4\cdot\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\frac{d+1}{2}\,\Gamma(d/2)\,d/2\,/\,\Gamma(d/2)}{d^{-1/2}\,2\,\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)2^{1/2}d^{-1/2}\,\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)\frac{d+2}{2}/\Gamma(d/2)} \\
&= \frac{1}{d^{5/2}}\;\frac{2\,\cancel{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\cancel{\Gamma(d/2)}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}/\cancel{\Gamma(d/2)} + 2^5\cancel{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\frac{d+3}{2}\frac{d+1}{2} + 3\cdot2^4\cancel{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\frac{d+1}{2}\frac{d}{2}}{\frac{1}{d}\,2\,2^{1/2}\cancel{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\cancel{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\frac{d}{2}\frac{d+2}{2}/\cancel{\Gamma(d/2)}} \\
&= \frac{1}{d^{3/2}}\;\frac{\frac{d(d+2)}{2} + 2^3(d+1)(d+3) + 3\cdot2^2d(d+1)}{2^{1/2}\,d\,\frac{d+2}{2}} \\
&= \frac{1}{d}\cdot\frac{1}{d}\cdot\frac{1}{\sqrt{d}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot2\;\frac{\frac{1}{2}d(d+2) + 8(d+1)(d+3) + 12d(d+1)}{d+2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{d}}\left\{\frac{1}{2}\frac{d(d+2)}{d^2(d+2)} + 8\frac{(d+1)(d+3)}{d^2(d+2)} + 12\frac{d(d+1)}{d^2(d+2)}\right\} \\
&= \sqrt{\frac{2}{d}}\left\{\frac{1}{2d} + 12\frac{d+1}{d(d+2)} + 8\frac{(d+1)(d+3)}{d^2(d+2)}\right\}
\end{aligned}$$

$$\frac{\langle C_{12}C^4\rangle_0^{Tr}+9\langle C_{12}^3C^2\rangle_0^{Tr}}{\langle C_{12}\rangle_0^{Tr}\langle C_1^4\rangle_0^{Tr}} = \frac{d^{-5/2}\,2\,\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+4}{2}\right)/\cancel{\Gamma^2(d/2)} + 9\,d^{-5/2}\,2^3\,\Gamma\left(\frac{d+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)/\cancel{\Gamma(d/2)^2}}{d^{-1/2}\,2\,\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)/\cancel{\Gamma(d/2)}\cdot\sqrt{2/d}\,\Gamma\left(\frac{d+4}{2}\right)/\cancel{\Gamma(d/2)}}$$

$$= \frac{1}{d^{5/2}}\,\frac{2\,\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)\frac{d+2}{2} + 9\cdot 2^3\,\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\frac{d+1}{2}\,\Gamma(d/2)\,d/2}{\frac{1}{d}\,2\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)\frac{d+2}{2}}$$

$$= \frac{1}{d^{5/2}}\,\frac{2\,\cancel{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\cancel{\Gamma(d/2)}\,d/2\,\frac{d+2}{2} + 9\cdot 2^3\,\cancel{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\cancel{\Gamma(d/2)}\,\frac{d}{2}\,\frac{d+1}{2}}{\frac{1}{d}\,2\sqrt{2}\,\cancel{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\cancel{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\,\frac{d+2}{2}\,\frac{d}{2}}$$

$$= \frac{1}{d^{3/2}}\,\frac{2\,d/2\,\frac{d+2}{2} + 9\cdot 2^3\,\frac{d}{2}\,\frac{d+1}{2}}{\sqrt{2}\,d\,\frac{d+2}{2}}$$

$$= \frac{1}{d^{3/2}}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{d}\,\frac{1}{d+2}\left(d(d+2) + 9\cdot 2\cdot d(d+1)\right)$$

$$= \frac{1}{d^{5/2}}\,\frac{\sqrt{2}}{d+2}\left(d(d+2) + 18\,d(d+1)\right)$$

$$= d^{-3/2}\sqrt{2}\left(\frac{d+2}{d+2} + 18\,\frac{d+1}{d+2}\right)$$

$$= d^{-3/2}\sqrt{2}\left(1 + 18\,\frac{d+1}{d+2}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\sqrt{\frac{2}{d}}\left(1 + 18\,\frac{d+1}{d+2}\right)$$

$$\frac{1}{1-1-a_2\frac{15}{16}} \;\Big|\; \frac{1+a_2\frac{15}{16}}{1-\frac{15}{16}a_2} \qquad = +a_2\frac{15}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle C_{12}C_1^4\rangle}{\langle C_{12}\rangle\langle C_1^4\rangle} = \sqrt{\frac{2}{d}}\left(\frac{1}{2d} + 12\,(d+1)/d(d+2) + 8\,(d+1)(d+3)/d^2(d+2)\right) + a_2\,\frac{1}{d^2}\sqrt{\frac{2}{d}}\left(1 + 18\,\frac{d+1}{d+2}\right)$$

Tous les termes étant évalués, mode (**):

$$1+\frac{1}{2d}+\frac{1}{8}a_2(2+3/d) = 1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{d}}\left(\frac{1}{2d}+12\,\frac{d+1}{d(d+2)}+8\,\frac{(d+1)(d+3)}{d^2(d+2)} + a_2\,\frac{1}{d^2}\left(1+18\,\frac{d+1}{d+2}\right)\right) - \frac{1}{2} + \frac{1-p}{p}\,\frac{1}{G(d)}\underbrace{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^{5/2}\langle C_{12}\rangle_0^{Tr}\langle C_1^4\rangle_0^{Tr}\left(1+a_2\,\frac{15}{16}\right)\right)^{-1}}_{=\left(\frac{2}{d}\right)^{5/2}\frac{1}{\langle C_{12}\rangle_0^{Tr}\langle C_1^4\rangle_0^{Tr}}\cdot\left(1-\frac{15}{16}a_2\right)}\,M_4$$

$$:= G'$$

$$G = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d-1}{2}}}\left(\frac{2}{d}\right)^{5/2}\frac{\Gamma(d/2)^2}{d^{-1/2}\cdot 2\cdot\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{d}}\,\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)\frac{d+2}{2}}\,\frac{\Omega_d}{\sqrt{2\pi}}\,a_2\cdot T_2\left(1-\frac{15}{16}a_2\right)$$

$$= \left(\frac{2}{d}\right)^{5/2}\left(\frac{d}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{\pi^{\frac{d-1}{2}}}\,d^{1/2}\,\frac{1}{2}\,\cancel{\Gamma(d/2)^2}\,\frac{2}{d+2}\,\frac{1}{\cancel{\Gamma(d/2)}\frac{d}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2\pi^{d/2}}{\cancel{\Gamma(d/2)}}\,T_2\cdot a_2 + o(a_2^2)$$

$$= \left(\frac{2}{d}\right)^2\frac{1}{\cancel{2}}\,d^{1/2}\,\frac{2}{d+2}\,\frac{2}{d}\,\frac{1}{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\cancel{\pi^{1/2}}}\,\cancel{\pi^{d/2}}\,T_2\,a_2\,\cancel{2} \quad , T_2 = \frac{1}{4}(1+1)(d-1)$$

$$= \frac{1}{d^2}\,2^2\,d^{1/2}\,\frac{2}{d+2}\,\frac{2}{d}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,T_2\,a_2 = \frac{2^4}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{d^3}\,\frac{d^{1/2}}{d+2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\,\cancel{2}^{1/2}(d-1)\,a_2 = \frac{2^3}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{d}\,(d-1)}{d(d+2)}\,a_2 = \frac{8}{\sqrt{2}}\,\frac{d-1}{\sqrt{d}\,(d+2)}\,a_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{1+\frac{1}{2d}}_{=\alpha} + a_2\underbrace{\frac{2+3/d}{8}}_{=\beta} = 1+\underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{d}}\left(\frac{1}{2d}+12\,\frac{d+1}{d(d+2)}+8\,\frac{(d+1)(d+3)}{d^2(d+2)}\right.}_{=\gamma} + a_2\underbrace{\frac{1}{d^2}\left(1+18\,\frac{d+1}{d+2}\right)}_{=\delta\,:\,2\sqrt{d/2}}\left.\right) - 1/2 + \underbrace{\frac{1-p}{p}\,\frac{8}{\sqrt{2}}\,\frac{d-1}{\sqrt{d}\,(d+2)}}_{=\mu}\,a_2$$

$$\Rightarrow \alpha + a_2\beta = 1+\gamma + a_2\cdot\delta - 1/2 + \mu\cdot a_2 = 1/2 + \gamma + a_2(\delta+\mu)$$

$$\Rightarrow \alpha + 1/2 = a_2(\delta+\mu-\beta)$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{\delta+\mu-\beta}{\alpha+1/2}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{1/2\sqrt{2/d}\,\frac{1}{d^2}\left(1+18\,\frac{d+1}{d+2}\right) + \frac{1-p}{p}\,\frac{8}{\sqrt{2}}\,\frac{d-1}{\sqrt{d}\,(d+2)} - \frac{1}{8}\left(2+\frac{3}{d}\right)}{1+\frac{1}{2d}+1/2}$$

: je n'ai perdu M ! ? D'abord faire à l'ordre le plus bas pour ce ...

• Exposants de déclin suite : corrections. $k=2$: idem annihilation pure. $k=4$: différent. Calcul des moments :

$$\langle c_{12} c_1^4\rangle = \langle c_{12}\tfrac{1}{2}(c_1^4+c_2^4)\rangle = \tfrac{1}{2}\langle c_{12}(2c^4+2(c\cdot c_{12})^2+\tfrac{1}{8}c_{12}^4+c^2c_{12}^2)\rangle \quad ; \quad (c\cdot c_{12})^2 = \tfrac{1}{d}c^2c_{12}^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\langle c_{12}(2c^4+\tfrac{2}{d}c^2c_{12}^2+\tfrac{1}{8}c_{12}^4+c^2c_{12}^2)\rangle = \tfrac{1}{2}\langle 2c^4c_{12} + c^2c_{12}^3(1+2/d) + 1/8\, c_{12}^5\rangle$$

$$= \langle c_{12}c^4\rangle + (1/2+1/d)\langle c_{12}^3c^2\rangle + 1/16\,\langle c_{12}^5\rangle$$

$$\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle = (1-1/16\,a_2)\langle c_{12}\rangle_0(1+a_2\cdot 1/8\cdot 4\cdot 2)\langle c_1^4\rangle_0 = \langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0(1-1/16\,a_2)(1+a_2) = \langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0(1+a_2-1/16\,a_2)+O(a_2^2)$$

$$= (1+15/16\,a_2)\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0$$

Avec :

$$\langle c_{12}c^4\rangle = (1+a_2/16d\,(d(1+16)-2d(1+4)+2\cdot 4(d+2)))\langle c_{12}c^4\rangle_0 = (1+\tfrac{a_2}{16d}(17d-10d+8d+16))\langle c_{12}c^4\rangle_0$$

$$= (1+\tfrac{a_2}{16d}(15d+16))\langle c_{12}c^4\rangle_0 = (1+\tfrac{15}{16}a_2+\tfrac{1}{d}a_2)\langle c_{12}c^4\rangle_0$$

$$= (1+a_2(15/16+1/d))\langle c_{12}c^4\rangle_0$$

$$\langle c_{12}^3c^2\rangle = (1+\tfrac{a_2}{16d}(d(4+9)-2d(3+2)+2\cdot 3\cdot 2\cdot(d+2)))\cdot\langle c_{12}^3c^2\rangle_0 = (1+\tfrac{a_2}{16d}(13d-10d+12d+24))\langle c_{12}^3c^2\rangle_0$$

$$= (1+a_2(15/16+\tfrac{3}{2d}))\langle c_{12}^3c^2\rangle_0$$

$$\langle c_{12}^5\rangle = (1+\tfrac{a_2}{16d}(d(25+0)-2d(5+0)))\langle c_{12}^5\rangle_0 = (1+\tfrac{a_2}{16d}(25d-10d))\langle c_{12}^5\rangle_0 = (1+\tfrac{15}{16}a_2)\langle c_{12}^5\rangle_0$$

Ainsi :

$$\langle c_{12}c_1^4\rangle = (1+a_2(15/16+1/d))\langle c_{12}c^4\rangle_0 + (1/2+1/d)(1+a_2(15/16+\tfrac{3}{2d}))\langle c_{12}^3c^2\rangle_0 + \tfrac{1}{16}(1+\tfrac{15}{16}a_2)\langle c_{12}^5\rangle_0$$

$$= \langle c_{12}c^4\rangle_0 + (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{d})\langle c_{12}^3c^2\rangle_0 + 1/16\,\langle c_{12}^5\rangle_0 + a_2\cdot\{(15/16+1/d)\langle c_{12}c^4\rangle_0 + (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{d})(\tfrac{15}{16}+\tfrac{3}{2d})\langle c_{12}^3c^2\rangle_0 + \tfrac{1}{16}\tfrac{15}{16}\langle c_{12}^5\rangle_0\}$$

Division polynômiale $O(a_2^2)$:

$$\frac{\langle c_{12}c_1^4\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}(\beta-\delta\tfrac{\alpha}{\gamma})a_2 + O(a_2^2) \qquad \begin{cases}\alpha = \langle c_{12}c^4\rangle_0 + (1/2+\tfrac{1}{d})\langle c_{12}^3c^2\rangle_0 + 1/16\,\langle c_{12}^5\rangle_0\\ \beta = (\tfrac{15}{16}+1/d)\langle c_{12}c^4\rangle_0 + (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{d})(\tfrac{15}{16}+\tfrac{3}{2d})\langle c_{12}^3c^2\rangle_0 + \tfrac{15}{(16)^2}\langle c_{12}^5\rangle_0 = \tfrac{15}{16}\alpha + \tfrac{1}{d}\langle c_{12}c^4\rangle_0 + \tfrac{3}{2d}\langle c_{12}^3c^2\rangle_0\\ \gamma = \langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0 \quad ; \quad \delta = \tfrac{15}{16}\gamma\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle c_{12}c_1^4\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}(\tfrac{15}{16}\alpha + \tfrac{1}{d}\langle c_{12}c^4\rangle_0 + \tfrac{3}{2d}\langle c_{12}^3c^2\rangle_0\cdot(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{d}) - \tfrac{15}{16}\cancel{\gamma}\tfrac{\alpha}{\gamma})a_2$$

$$= \alpha/\gamma + 1/\gamma(\tfrac{15}{16}\alpha\cancel{(1-1)} + 1/d\,\langle c_{12}c^4\rangle_0 + 3/2d\,\langle c_{12}^3c^2\rangle_0)$$

$$= \alpha/\gamma + 1/\gamma\,\tfrac{1}{d}(\langle c_{12}c^4\rangle_0 + 3/2\,\langle c_{12}^3c^2\rangle_0\cdot(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{d}))a_2$$

$$= \underbrace{\frac{\langle c_{12}c^4\rangle_0 + (1/2+1/d)\langle c_{12}^3c^2\rangle_0 + 1/16\langle c_{12}^5\rangle_0}{\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0}}_{:=\xi} + \underbrace{\frac{1}{d}\frac{\langle c_{12}c^4\rangle_0 + \tfrac{3}{2}\langle c_{12}^3c^2\rangle_0\cdot(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{d})}{\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0}}_{:=\xi'}a_2$$

L'éqn. est donc :

$$1+\frac{1}{2d}+a_2\frac{1}{8}(2+\frac{3}{d}) = 1+\frac{1}{2}(\xi+\xi'a_2-1) + \frac{1-p}{p}\overbrace{\frac{1}{C(d)}\frac{1}{(1+\frac{15}{16}a_2)\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0}M_4}^{z}$$

, avec $\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0$ de la notation de Noije (à changer ensuite)

$$M_4 = \frac{\Omega_d}{\sqrt{2\pi}}T_2\cdot a_2 \;,\quad T_2(\alpha=1) = \frac{d-1}{2} \;;\quad \Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2) \;;\quad C(d) = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\Gamma(\tfrac{d+1}{2})$$

$$z = \frac{1}{C(d)}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0}\frac{\Omega_d}{\sqrt{2\pi}}\frac{d-1}{2}\underbrace{\frac{a_2}{1+\frac{15}{16}a_2}}_{=a_2+O(a_2^2)} = a_2\cdot\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}\frac{2\cancel{\pi^{d/2}}}{\Gamma(d/2)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d-1}{2}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0} = a_2\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}\frac{d-1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{2d}+a_2\frac{1}{8}(2+3/d) = 1+\frac{1}{2}(\xi+\xi'a_2-1) + a_2\underbrace{\frac{1-p}{p}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}\frac{d-1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0}}_{\text{coll.}:=\tilde{I}}$$

] de not. Noije à corriger.

avec :

$$\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0 = \langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0^{\text{Noije}} = \left(\frac{d}{2}\right)^{5/2}\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0^{\text{moi}} = \left(\frac{d}{2}\right)^{5/2}(\sqrt{d})^{-1}\,2\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\cdot\left(\frac{2}{d}\right)^{4/2}\Gamma(\tfrac{d+4}{2})/\Gamma(d/2)$$

$$= \sqrt{d/2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,2\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\;\Gamma(d/2+2)/\Gamma(d/2) = \sqrt{2}\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\,(\tfrac{d}{2}+1)\tfrac{d}{2}$$

$$\tilde{I} = \frac{1-p}{p}\Gamma(d+1/2)/\Gamma(d/2)\frac{d-1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma(d/2)/\Gamma(d+1/2)\frac{2}{d}\frac{1}{d/2+1} = \frac{1-p}{p}\frac{d-1}{2}\frac{2}{d}\frac{2}{d+2} = \frac{1-p}{p}\frac{2}{d}\frac{d-1}{d+2}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{2d}+a_2\frac{1}{8}(2+3/d) = 1+1/2(\xi+\xi'a_2-1) + a_2\cdot\frac{1-p}{p}\frac{2}{d}\frac{d-1}{d+2}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{2d}-1 = a_2\left(\frac{1-p}{p}\frac{2}{d}\frac{d-1}{d+2}-\frac{1}{8}(2+3/d)\right) + 1/2\,\xi - 1/2 + 1/2\,\xi'a_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2d}-1/2\,\xi+1/2 = a_2\left(\frac{1-p}{p}\frac{2}{d}\frac{d-1}{d+2}-\frac{1}{8}(2+3/d)+1/2\,\xi'\right)$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{\frac{1}{2d}+\frac{1}{2}(1-\xi)}{\frac{1-p}{p}\frac{2}{d}\frac{d-1}{d+2}+\frac{1}{2}\xi'-\frac{1}{8}(2+3/d)}$$

Avec :

$$= d^{-5/2}\,2\,\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{d+4}{2})}{\Gamma(d/2)^2} \qquad = d^{-5/2}\,2^3\,\frac{\Gamma(\frac{d+3}{2})\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\Gamma(d/2)^2}$$

$$\xi = \left(\sqrt{2}\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)(\tfrac{d}{2}+1)\tfrac{d}{2}\right)^{-1}\{\langle c_{12}c^4\rangle_0 + (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{d})\langle c_{12}^3c^2\rangle_0 + \tfrac{1}{16}\langle c_{12}^5\rangle_0\}$$

$$= d^{-5/2}\,2^9\,\frac{\Gamma(d/2)\Gamma(\frac{d+5}{2})}{\Gamma(d/2)^2} = d^{-5/2}\,\Gamma(\tfrac{d+3}{2}+1)/\Gamma(d/2) = d^{-5/2}\,\frac{d+3}{2}\frac{d+1}{2}\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{2}{d}\frac{1}{\frac{d}{2}+1}\cdot d^{-5/2}\left\{2\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} + (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{d})2^3\frac{d+1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}\frac{d}{2} + \frac{1}{16}\frac{d+3}{2}\frac{d+1}{2}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{d}\frac{2}{d+2}d^{-5/2}\left\{\frac{d(d+2)}{2} + (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{d})\,2d(d+1) + \frac{1}{64}(d+1)(d+3)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{d^{7/2}}\frac{1}{d+2}\left\{2d(d+2) + 8d(d+1)(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{d}) + \frac{1}{16}(d+1)(d+3)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{d^{7/2}}\frac{1}{d+2}\left\{2d^2+2d + (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{d})(8d^2+8d) + \tfrac{1}{16}(d^2+3d+d+3)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{d^{7/2}}\frac{1}{d+2}\left(2d^2+2d+4d^2+4d+8d+8+\tfrac{1}{16}d^2+\tfrac{4}{16}d+\tfrac{3}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{d^{7/2}}\frac{1}{d+2}\left((6+\tfrac{1}{16})d^2+(14+\tfrac{4}{16})d+(8+\tfrac{3}{16})\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{d^{7/2}}\frac{1}{d+2}\left(\frac{97}{16}d^2+\frac{57}{4}d+\frac{131}{16}\right)$$

$$\xi' = \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma(d/2)/\Gamma(\tfrac{d+1}{2})\frac{2}{d}\frac{2}{2+d}\{\langle c_{12}c^4\rangle_0 + \tfrac{3}{2}\langle c_{12}^3c^2\rangle_0\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma(d/2)/\Gamma(\tfrac{d+1}{2})\frac{2}{d}\frac{2}{2+d}\left\{d^{-5/2}\,2\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} + d^{-5/2}\frac{3}{2}2^3\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{d}\frac{2}{2+d}d^{-5/2}\left(\frac{d(d+2)}{2}+\frac{3}{2}2^3\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4}{d(d+2)}d^{-5/2}\left(\frac{d(d+2)}{2}+3d(d+1)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{d+2}d^{-5/2}\left(2(d+2)+12(d+1)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{d+2}d^{-5/2}\left(2d+4+12d+12\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{d+2}d^{-5/2}\left(14d+16\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{d+2}d^{-5/2}(7d+8)$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{\frac{1}{2d}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{d^{7/2}}\frac{1}{d+2}\left(\frac{97}{4}d^2+57d+\frac{131}{4}\right)}{\frac{1-p}{p}\frac{2}{d}\frac{d-1}{d+2}-\frac{1}{8}(2+\frac{3}{d})+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{d+2}\frac{1}{d^{5/2}}(7d+8)}$$

↯ probablement une erreur...

• Exposants de déclin : correction. $k=4$; $\alpha=1$;

$$\frac{\langle c_{12} c_1^2\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^2\rangle} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\langle c_{12} c_1^4\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle} - 1\right) + \frac{1-p}{p}\,\frac{1}{C(d)}\,\frac{1}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle}\,M_4 \quad ; C(d) = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\Gamma(\tfrac{d+1}{2})$$

$$= 1 + \frac{1}{2d} + \frac{1}{8}\left(2+\frac{3}{d}\right)a_2 \qquad M_4 = \frac{d-1}{\sqrt{2\pi}}\,\Omega_d\, a_2 = \frac{d-1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\,a_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2d} + a_2\frac{2+3/d}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{\langle c_{12}c_1^4\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle} - 1\right) + \frac{1-p}{p}\,\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d-1}{2}}}\,\frac{d-1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\,\frac{1}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle}\,a_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2d} + a_2\frac{2+3/d}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{\langle c_{12}c_1^4\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle} - 1\right) + \frac{1-p}{p}\sqrt{2}\,(d-1)\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\,\underbrace{\frac{1}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle}}_{\text{à transformer dans la notation de Noije}}\,a_2$$

Avec:

$$\langle c_{12}c_1^4\rangle = \frac{1}{2}\langle c_{12}(c_1^4+c_2^4)\rangle = \frac{1}{2}\langle c_{12}(2C^4 + 2(C\cdot c_{12})^2 + 1/8\, c_{12}^4 + C^2c_{12}^2)\rangle \quad ; (C\cdot c_{12})^2 = \frac{1}{d}C^2c_{12}^2$$

$$= \frac{1}{2}\langle c_{12}(2C^4 + 1/8\, c_{12}^4 + C^2c_{12}^2(1+2/d))\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle c_{12}2C^4\rangle + \frac{1}{2}\langle c_{12}^5/8\rangle + \frac{1}{2}\langle c_{12}^3C^2\rangle(1+2/d) = \langle c_{12}C^4\rangle + \frac{1}{16}\langle c_{12}^5\rangle + \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{d}\right)\langle c_{12}^3C^2\rangle$$

$$\langle c_{12}C^4\rangle = \left(1 + \frac{a_2}{16d}\left(d(1+16) - 2d(1+4) + 2\cdot1\cdot4(d+2)\right)\right)\langle c_{12}C^4\rangle_0 = \left\{1 + \frac{a_2}{16d}(17d - 10d + 8d + 16)\right\}\langle c_{12}C^4\rangle_0 = \left\{1 + \frac{a_2}{16d}(15d+16)\right\}\langle c_{12}C^4\rangle_0$$

$$= \left\{1 + a_2\left(\frac{15}{16} + \frac{1}{d}\right)\right\}\langle c_{12}C^4\rangle_0$$

$$\langle c_{12}^5\rangle = \{1 + a_2/16d\,(d\cdot25 - 2d\cdot5)\}\langle c_{12}^5\rangle_0 = \left\{1 + a_2\,\frac{15}{16}\right\}\langle c_{12}^5\rangle_0$$

$$\langle c_{12}^3C^2\rangle = \left\{1 + \frac{a_2}{16d}\left(d(9+4) - 2d(3+2) + 2\cdot3\cdot2\cdot(d+2)\right)\right\}\langle c_{12}^3C^2\rangle_0 = \left\{1 + \frac{a_2}{16d}(13d - 10d + 12d + 24)\right\}\langle c_{12}^3C^2\rangle_0 = \left\{1 + \frac{a_2}{16d}(15d+24)\right\}\langle c_{12}^3C^2\rangle_0$$

$$= \left\{1 + a_2\left(\frac{15}{16} + \frac{3}{2d}\right)\right\}\langle c_{12}^3C^2\rangle_0$$

$$\langle c_{12}\rangle = \left\{1 + \frac{a_2}{16d}(d\cdot1 - 2d\cdot1)\right\}\langle c_{12}\rangle_0 = \left\{1 - \frac{1}{16}a_2\right\}\langle c_{12}\rangle_0$$

$$\langle c_1^4\rangle = \{1 + a_2/8\cdot4(4-2)\}\langle c_1^4\rangle_0 = (1+a_2)\langle c_1^4\rangle_0$$

Ainsi:

$$\langle c_{12}c_1^4\rangle = \left\{1 + a_2\left(\frac{15}{16}+\frac{1}{d}\right)\right\}\langle c_{12}C^4\rangle_0 + \frac{1}{16}\left(1 + \frac{15}{16}a_2\right)\langle c_{12}^5\rangle_0 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{d}\right)\left(1 + a_2\left(\frac{15}{16}+\frac{3}{2d}\right)\right)\langle c_{12}^3C^2\rangle_0$$

$$= \underbrace{\langle c_{12}C^4\rangle_0 + \frac{1}{16}\langle c_{12}^5\rangle_0 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{d}\right)\langle c_{12}^3C^2\rangle_0}_{=\alpha} + a_2\cdot\underbrace{\left\{\left(\frac{15}{16}+\frac{1}{d}\right)\langle c_{12}C^4\rangle_0 + \frac{15}{16^2}\langle c_{12}^5\rangle_0 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{d}\right)\left(\frac{15}{16}+\frac{3}{2d}\right)\langle c_{12}^3C^2\rangle_0\right\}}_{=\beta}$$

$$\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle = \left(1-\frac{1}{16}a_2\right)(1+a_2)\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0 = \left(1 + a_2 - \frac{1}{16}a_2\right)\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0 = \left(1 + \frac{15}{16}a_2\right)\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0 = \underbrace{\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0}_{\gamma} + \underbrace{\frac{15}{16}\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0\, a_2}_{\delta}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle c_{12}c_1^4\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle} = \frac{\alpha+\beta a_2}{\gamma+\delta a_2} \quad ; \delta = \frac{15}{16}\gamma$$

$$= (\alpha+\beta a_2)/\gamma\left(1+\frac{15}{16}a_2\right) = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\alpha+\beta a_2}{1+\frac{15}{16}a_2}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left(\alpha + \left(\beta - \frac{15}{16}\alpha\right)a_2\right)$$

$$= \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\left(\beta - \frac{15}{16}\alpha\right)a_2$$

$\alpha + \beta a_2$	$1 + \frac{15}{16}a_2$
$\beta a_2 - \frac{15}{16}\alpha a_2$	$\alpha + (\beta - \frac{15}{16}\alpha)a_2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2d} + a_2\frac{2+3/d}{8} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma}\left(\beta - \frac{15}{16}\alpha\right)a_2 + \frac{1-p}{p}\sqrt{2}(d-1)\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\,\frac{1}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle}\,a_2$$

$$\frac{1}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle} = \left(\langle c_{12}\rangle^{\text{Noije}}\langle c_1^4\rangle^{\text{Noije}}\right)^{-1} = \left(\left(\frac{d}{2}\right)^{n/2}\langle c_{12}\rangle^{\text{Trizac}}\langle c_1^4\rangle^{\text{Trizac}}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{d}\right)^{5/2}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^4\rangle} = \left(\frac{2}{d}\right)^{5/2}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0}\,\frac{1}{1+\frac{15}{16}a_2} = \left(\frac{2}{d}\right)^{5/2}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0}\left(1 - \frac{15}{16}a_2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2d} + a_2\frac{2+3/d}{8} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\langle c_{12}C^4\rangle_0 + \frac{1}{16}\langle c_{12}^5\rangle_0 + \frac{1}{2}(1+\frac{2}{d})\langle c_{12}^3C^2\rangle_0}{\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0} + \frac{1}{2\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0}\left(\left(\cancel{\frac{15}{16}}+\frac{1}{d}\right)\langle c_{12}C^4\rangle_0 + \frac{15}{16^2}\langle c_{12}^5\rangle_0 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{d}\right)\left(\cancel{\frac{15}{16}}+\frac{3}{2d}\right)\langle c_{12}^3C^2\rangle_0 - \frac{15}{16}\left(\cancel{\langle c_{12}C^4\rangle_0} + \frac{1}{16}\langle c_{12}^5\rangle_0 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{d}\right)\cancel{\langle c_{12}^3C^2\rangle_0}\right)\right)a_2$$

$$+ \frac{1-p}{p}\sqrt{2}(d-1)\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\left(\frac{2}{d}\right)^{5/2}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0}\left(1 - \frac{15}{16}a_2\right)$$

$$\Rightarrow (\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0)\cdot\left(\frac{1}{2d} + a_2\frac{2+3/d}{8}\right) = + \frac{1}{2}\left(\langle c_{12}C^4\rangle_0 + \frac{1}{16}\langle c_{12}^5\rangle_0 + \frac{1}{2}(1+2/d)\langle c_{12}^3C^2\rangle_0\right) + \frac{1}{2}a_2\left(\frac{1}{d}\langle c_{12}C^4\rangle_0 + \langle c_{12}^5\rangle_0\left(-\frac{1}{16^2} - \frac{15}{16^2}\right) + \frac{1}{2}(1+2/d)\left(\frac{15}{16}+\frac{3}{2d}\right)\langle c_{12}^3C^2\rangle_0\left(\frac{16}{16} - \frac{15}{16}\right)\right)$$

$$+ \frac{1-p}{p}\sqrt{2}(d-1)\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\left(\frac{2}{d}\right)^{5/2}\left(1 - \frac{15}{16}a_2\right)$$

$$= - + \frac{1}{2}\left(\langle c_{12}C^4\rangle_0 + \frac{1}{16}\langle c_{12}^5\rangle_0 + \frac{1}{2}(1+2/d)\langle c_{12}^3C^2\rangle_0\right) + \frac{1}{2}a_2\left(\frac{1}{d}\langle c_{12}C^4\rangle_0 - \frac{1}{16}\langle c_{12}^5\rangle_0 + \frac{1}{16}\,\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{d}\right)\left(\frac{15}{16}+\frac{3}{2d}\right)\langle c_{12}^3C^2\rangle_0\right)$$

$$+ \frac{1-p}{p}\sqrt{2}(d-1)\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\left(\frac{2}{d}\right)^{5/2}\left(1 - \frac{15}{16}a_2\right)$$

Avec:

$$\left.\begin{aligned}\langle c_{12}\rangle_0 &= \frac{1}{\sqrt{d}}\,2\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)\\ \langle c_1^4\rangle_0 &= \frac{4}{d^2}\,\Gamma(\tfrac{d+4}{2})/\Gamma(d/2) = \frac{4}{d^2}\,\frac{d+2}{2}\,\frac{d}{2}\,\Gamma(d/2)/\Gamma(d/2) = \frac{d+2}{d}\end{aligned}\right\}\ \langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0 = \frac{2}{\sqrt{d}}\,\frac{d+2}{d}\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)$$

$$\langle c_{12}C^4\rangle_0 = (\sqrt{d})^5\,2\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})\Gamma(\tfrac{d+4}{2})/\Gamma(d/2)^2 = d^{-5/2}\cdot2\cdot\Gamma((d+1)/2)/\Gamma(d/2)\,\frac{d+2}{2}\,\frac{d}{2} = \frac{(d+2)\,d}{4}\cdot\frac{2}{d}\,\frac{1}{d^{3/2}}\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2) = \frac{d+2}{2d^{3/2}}\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)$$

$$\langle c_{12}^5\rangle_0 = \cancel{(2/d)^{5/2}\,\Gamma(\tfrac{d+5}{2})/\Gamma(d/2) = (2/d)^{5/2}\,\frac{d+3}{2}\,\frac{d+1}{2}\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2) = 4\sqrt{2}\,d^{-5/2}\,\frac{d+3}{2}\,\frac{d+1}{2}\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2) = \sqrt{2}\,\frac{(d+1)(d+3)}{d^{5/2}}\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)}$$

$$\langle c_{12}^3C^2\rangle_0 = \frac{1}{d^{5/2}}\,2^3\,\Gamma(\tfrac{d+3}{2})\Gamma(\tfrac{d+2}{2})/\Gamma(d/2)^2 = \frac{1}{d^{5/2}}\,2^3\,\frac{d+1}{2}\,\frac{d}{2}\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2) = \frac{2}{d^{3/2}}(d+1)\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2) = 2\,\frac{d+1}{d^{3/2}}\,\Gamma(\tfrac{d+1}{2})/\Gamma(d/2)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{d}}\,\frac{d+2}{d}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2d} + a_2\frac{2+3/d}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d+2}{2d^{3/2}} + \frac{1}{16}\sqrt{2}\,\frac{(d+1)(d+3)}{d^{5/2}} + \cancel{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{d}\right)\cancel{2}\,\frac{d+1}{d^{3/2}}\right) + \frac{1}{2}a_2\left(\frac{1}{d}\,\frac{d+2}{2d^{3/2}} - \frac{1}{16}\sqrt{2}\,\frac{(d+1)(d+3)}{d^{5/2}} + \frac{1}{32}\left(1+\frac{2}{d}\right)\left(\frac{15}{16}+\frac{3}{2d}\right)2\,\frac{d+1}{d^{3/2}}\right)$$

$$+ \frac{1-p}{p}\sqrt{2}(d-1)\left(\frac{2}{d}\right)^{5/2}\left(1 - \frac{15}{16}a_2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2(d+2)}{d^{3/2}}\,\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{d}\right) + \frac{d+2}{d^{3/2}}\,\frac{2+3/d}{8}\,a_2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{d^{3/2}}\left(\frac{1}{2}(d+2) + \frac{1}{16}\sqrt{2}\,\frac{(d+1)(d+3)}{d} + \left(1+\frac{2}{d}\right)(d+1)\right) + \frac{1-p}{p}(d-1)\,\frac{2^3}{d^{5/2}} - \frac{1-p}{p}(d-1)\,\frac{2^3}{d^{5/2}}\,\frac{15}{2^4}\,a_2$$

$$+ \frac{1}{2}a_2\,\frac{1}{d^{3/2}}\left(\frac{d+2}{2d} - \frac{\sqrt{2}}{16}\,\frac{(d+1)(d+3)}{d} + \frac{1}{16}\left(1+\frac{2}{d}\right)\left(\frac{15}{16}+\frac{3}{2d}\right)(d+1)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d+2}{\cancel{d^{3/2}}}\left(1+\frac{1}{d}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cancel{d^{3/2}}}\left(\frac{d}{2} + 1 + d + 1 + 2 + \frac{2}{d} + \frac{1}{16}\sqrt{2}\,\frac{(d+1)(d+3)}{d}\right) - \frac{1-p}{p}\,\frac{2^3}{\cancel{d^{3/2}}}\,\frac{1}{d}(d-1) = a_2\cdot\left\{-\frac{d+2}{\cancel{d^{3/2}}}\,\frac{2+3/d}{8} - \frac{1-p}{p}(d-1)\,\frac{15}{2}\,\frac{1}{\cancel{d^{3/2}}}\,\frac{1}{d}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cancel{d^{3/2}}}\left(\frac{d+2}{2d} - \frac{\sqrt{2}}{16}\,\frac{(d+1)(d+3)}{d} + \frac{1}{16}(d+1)\cdot\left(\frac{15}{16} + \frac{3}{2d} + \frac{30}{16d} + \frac{6}{2d^2}\right)\right)\right\}$$

$$\Rightarrow d+1+2+2/d - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}d + 4 + \frac{2}{d} + \frac{1}{16}\sqrt{2}\,\frac{(d+1)(d+3)}{d}\right) - \frac{1-p}{p}\,2^3\,\frac{d-1}{d} = a_2\left(-\frac{1}{8}(d+2)(2+3/d) - \frac{1-p}{p}\,\frac{d-1}{d}\,\frac{15}{2} + \frac{d+2}{4d} - \frac{\sqrt{2}}{32}\,\frac{(d+1)(d+3)}{d} + \frac{1}{32}\left(\frac{15}{16}d + \frac{3}{2} + \frac{30}{16} + \frac{3}{d} + \frac{15}{16} + \frac{3}{2d} + \frac{30}{16d} + \frac{3}{d^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow d+3+2/d - \frac{3}{4}d - 2 - \frac{1}{d} - \frac{\sqrt{2}}{32}\,\frac{d^2+3d+d+3}{d} - \frac{1-p}{p}\,2^3\,\frac{d-1}{d} = a_2\left(-\frac{1}{8}(2d+3+4+6/d) - \frac{1-p}{p}\,\frac{d-1}{d}\,\frac{15}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2d} - \frac{\sqrt{2}}{32}\,\frac{d^2+4d+3}{d} + \frac{1}{32}\left(\frac{15}{16}d + \frac{54}{16} + \frac{15}{16} + \frac{59}{16d} + 3/d^2\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}d + 1 + \frac{1}{d} - \frac{\sqrt{2}}{32}\left(d + 4 + \frac{3}{d}\right) - 8\,\frac{d-1}{d}\,\frac{1-p}{p} = a_2\cdot\left(-\frac{1}{4}d - \frac{7}{8} - \frac{3}{4d} - \frac{15}{2}\,\frac{d-1}{d}\,\frac{1-p}{p} + \frac{2}{8} + \frac{2}{4d} - \frac{\sqrt{2}}{32}\left(d + 4 + \frac{3}{d}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{15}{16^2}d + \frac{1}{2}\,\frac{69}{16^2} + \frac{27}{16^2d} + \frac{3}{32d^2}\right)$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{32}\right) + 1 - \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{d}\left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{32}\right) - 8\,\frac{d-1}{d}\,\frac{1-p}{p} = a_2\cdot\left(d\cdot\left(-1/4 - \frac{\sqrt{2}}{32} + \frac{1}{2}\,\frac{15}{16^2}\right) - \frac{15}{2}\,\frac{d-1}{d}\,\frac{1-p}{p} - \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{2}\,\frac{69}{16^2} + \frac{1}{d}\left(-\frac{3}{4} + \frac{2}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{32} + \frac{27}{16^2}\right) + \frac{3}{32d^2}\right)$$

$$\Rightarrow d\cdot\frac{8-\sqrt{2}}{32} + \frac{8-\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{d}\left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{32}\right) - 8\,\frac{d-1}{d}\,\frac{1-p}{p} = a_2\left(d\left(-\frac{8+\sqrt{2}}{32} + \frac{1}{2}\,\frac{15}{16^2}\right) - \frac{5+\sqrt{2}}{8} - \frac{15}{2}\,\frac{d-1}{d}\,\frac{1-p}{p} + \frac{1}{2}\,\frac{69}{16^2} + \frac{1}{d}\left(-\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{32} + \frac{27}{16^2}\right) + \frac{3}{32d^2}\right)$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{d\,\frac{8-\sqrt{2}}{32} + \frac{8-\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{d}\left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{32}\right) - 8\,\frac{d-1}{d}\,\frac{1-p}{p}}{d\left(\frac{1}{2}\,\frac{15}{16^2} - \frac{8+\sqrt{2}}{32}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{69}{16^2} - \frac{5+\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{d}\left(\frac{27}{16^2} - \frac{3\sqrt{2}}{32} - \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{32d^2}} \quad \Big)\times\frac{32}{32}$$

$$= \frac{d(8-\sqrt{2}) + 4(8-\sqrt{2}) + 1/d\,(32-3\sqrt{2}) - 256\,\frac{d-1}{d}\,\frac{1-p}{p}}{d\left(\frac{15}{16} - 8 + \sqrt{2}\right) + \frac{69}{16} - 4(5+\sqrt{2}) + \frac{1}{d}\left(\frac{27}{8} - 3\sqrt{2} - 8\right) + 3/d^2} \quad \Big)\times d^2$$

$$= \frac{d^3(8-\sqrt{2}) + 4d^2(8-\sqrt{2}) + d(32-3\sqrt{2}) - 256\,d(d-1)\frac{1-p}{p}}{d^3\left(\frac{15}{16} - 8 - \sqrt{2}\right) + d^2\left(\frac{69}{16} - 4(5+\sqrt{2})\right) + d\left(\frac{27}{8} - 3\sqrt{2} - 8\right) + 3}$$

: comparaison avec Mathematica : probablement une erreur.

• Suite de B4 : reprend à la flèche rouge ↓ :

$$\frac{1}{2d} + a_2\frac{2+3/d}{8} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\langle c_{12}c^4\rangle_0 + \frac{1}{16}\langle c_{12}^5\rangle_0 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{d}\right)\langle c_{12}^3 c^2\rangle_0\right)/\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0 + \frac{1}{2\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0}\left(\frac{1}{d}\langle c_{12}C^4\rangle_0 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right)\frac{3}{2d}\langle c_{12}^3 C^2\rangle_0\right)a_2$$
$$+ \frac{1-p}{p}\sqrt{2}(d-1)\,\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)\left(\frac{2}{d}\right)^{5/2}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0}\left(1-\frac{15}{16}a_2\right)$$

$$\Rightarrow \langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0\left(\frac{1}{2d}+\frac{1}{2}+a_2\frac{2+3/d}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(\langle c_{12}C^4\rangle_0 + \frac{1}{16}\langle c_{12}^5\rangle_0 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right)\langle c_{12}^3C^2\rangle_0\right) + \frac{1}{2d}\left(\langle c_{12}C^4\rangle_0 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right)\langle c_{12}^3 c^2\rangle_0\right)a_2 + \frac{1-p}{p}\sqrt{2}(d-1)\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}\left(\frac{2}{d}\right)^{5/2}\left(1-\frac{15}{16}a_2\right) \quad (*)$$

Avec :

$$\left.\begin{array}{l}\langle c_{12}\rangle_0 = d^{-1/2}\, 2\, \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2) \\ \langle c_1^4\rangle_0 = \frac{4}{d^2}\Gamma\left(\frac{d+4}{2}\right)/\Gamma(d/2) = \frac{4}{d^2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} = \frac{d+2}{d}\end{array}\right\} \langle c_{12}\rangle_0\langle c_1^4\rangle_0 = \frac{2}{\sqrt{d}}\frac{d+2}{d}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2) = 2\frac{d+2}{d^{3/2}}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)$$

$$\langle c_{12}C^4\rangle_0 = d^{-5/2}\,2\,\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} = \frac{1}{2}\frac{d+2}{d^{3/2}}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)$$

$$\langle c_{12}^5\rangle_0 = d^{-5/2}2^5\,\Gamma\left(\tfrac{d+5}{2}\right)/\Gamma(d/2) = d^{-5/2}2^5\frac{d+3}{2}\frac{d+1}{2}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2) = d^{-5/2}2^3(d+3)(d+1)\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2) \qquad (**)$$

$$\langle c_{12}^3C^2\rangle_0 = d^{-5/2}2^3\,\Gamma\left(\tfrac{d+3}{2}\right)/\Gamma(d/2)\frac{d}{2} = d^{-5/2}2^3\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2) = 2\frac{d+1}{d^{3/2}}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)$$

$$\Rightarrow 2\frac{d+2}{d^{3/2}}\cancel{\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2d}+a_2\frac{2+3/d}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{d+2}{d^{3/2}}\cancel{\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)} + \frac{1}{16}2^3\frac{(d+3)(d+1)}{d^{5/2}}\cancel{\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)} + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right)2\frac{d+1}{d^{3/2}}\cancel{\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)}\right)$$
$$+\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{2}\frac{d+2}{d^{3/2}}\cancel{\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right)2\frac{d+1}{d^{3/2}}\cancel{\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)}\right)a_2 + \frac{1-p}{p}\sqrt{2}(d-1)2^{5/2}\frac{1}{d^{5/2}}\left(1-\frac{15}{16}a_2\right)\cancel{\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)}$$

$$\Rightarrow 2(d+2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2d}+a_2\frac{2+3/d}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(d+2) + \frac{1}{2}(d+1)(d+3)/d + 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right)(d+1)\right) + \frac{1}{2d}\left(\frac{1}{2}(d+2)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right)2(d+1)\right)a_2 + \frac{1-p}{p}2^3(d-1)\frac{1}{d}\left(1-\frac{15}{16}a_2\right)$$

$$\Rightarrow (d+2)\left(1+\frac{1}{d}\right) + a_2\cdot\frac{1}{4}\left(2+\frac{3}{d}\right)(2+d) = \frac{1}{2}\left(\frac{d+2}{2}+\frac{(d+1)(d+3)}{2d} + 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right)(d+1)\right) + a_2\frac{1}{2d}\left(\frac{d+2}{2}+3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right)(d+1)\right) + 2^3\frac{1-p}{p}\frac{d-1}{d}\left(1-\frac{15}{16}a_2\right)$$

$$\Rightarrow (d+2)(1+1/d) - \frac{d(d+2)}{d4} - \frac{(d+1)(d+3)}{4d} - (d+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right) = -a_2\frac{1}{4}(2+3/d)(2+d) + a_2\frac{1}{2d}\left(\frac{d+2}{2}+3(d+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right)\right) + 2^3\frac{1-p}{p}\frac{d-1}{d} - \frac{15}{2}\frac{1-p}{p}\frac{d-1}{d}a_2$$

$$\Rightarrow (d+2)(1+1/d) - \frac{1}{4d}\left(d^2+4d+3+d^2+2d\right) - (d+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right) - 2^3\frac{1-p}{p}\frac{d-1}{d} = a_2\cdot\left\{-\frac{(2+d)(2+3/d)}{4} + \frac{1}{2d}\left(\frac{d+2}{2}+3(d+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right)\right) - \frac{15}{2}\frac{1-p}{p}\frac{d-1}{d}\right\}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{d+1+2+2/d - \frac{1}{4d}(2d^2+6d+3) - d/2 - 1 - 1/2 - 1/d - 2^3\frac{1-p}{p}\frac{d-1}{d}}{-\frac{1}{4}(4+6/d+2d+3) + \frac{d+2}{4d} + \frac{3}{2}\frac{d+1}{d}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right) - \frac{15}{2}\frac{1-p}{p}\frac{d-1}{d}}$$

$$= \frac{d+3+2/d - \frac{1}{2}d - \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\frac{1}{d} - \frac{d}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{d} - 2^3\frac{1-p}{p}\frac{d-1}{d}}{-1 - \frac{3}{2}\frac{1}{d} - \frac{1}{2}d - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{d} + \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right) - \frac{15}{2}\frac{1-p}{p}\frac{d-1}{d}}$$

$$= \frac{1/d - 2^3\frac{1-p}{p}\frac{d-1}{d}}{-3/2 - d/2 - 1/d + 3/2\left(1/2 + 1/d + \frac{1}{2}\frac{1}{d} + \frac{1}{d^2}\right) - \frac{15}{2}\frac{1-p}{p}\frac{d-1}{d}}$$

$$= \frac{1}{d}\cdot\frac{1 - 2^3\frac{1-p}{p}(d-1)}{-3/2 - d/2 - 1/d + \frac{3}{4} + \frac{9}{4}\frac{1}{d} + \frac{3}{2}\frac{1}{d^2} - \frac{15}{2}\frac{1-p}{p}\frac{d-1}{d}}$$

$$= \frac{1}{d}\,\frac{1 - 2^3\frac{1-p}{p}(d-1)}{-\frac{3}{4} - \frac{d}{2} + \frac{5}{4}\frac{1}{d} + \frac{3}{2}\frac{1}{d^2} - \frac{15}{2}\frac{1-p}{p}\frac{d-1}{d}}$$

$$= \frac{1 - 8(d-1)\frac{1-p}{p}}{-\frac{d^2}{2} - \frac{3}{4}d + \frac{5}{4} + \frac{3}{2}\frac{1}{d} - \frac{15}{2}(d-1)\frac{1-p}{p}}$$

$$= 4\,\frac{1 - 8(d-1)\frac{1-p}{p}}{-2d^2 - 3d + 5 + 6/d - 30(d-1)\frac{1-p}{p}}$$

⚠ dénominateur : ∃ asymptote…

Mieux : résolution de (*) avec (**) par Mathematica ⇒

$$a_2 = -d\,\frac{\cancel{-32\frac{1}{\sqrt{d}}\sqrt{d}(-1+p) + 32\frac{1}{\sqrt{d}}d^{3/2}(-1+p) + p}}{30\cdot\frac{1}{\sqrt{d}}d^{3/2}(-1+p) - 30\frac{1}{\sqrt{d}}d^{5/2}(-1+p) - 6p - 5dp + 3d^2p + 2d^3p}$$

$$= -d\,\frac{1 + 32\frac{p-1}{p}d + 32\frac{p-1}{p}}{-30d\frac{p-1}{p} + 30d^2\frac{p-1}{p} - 6 - 5d + 3d^2 + 2d^3}$$

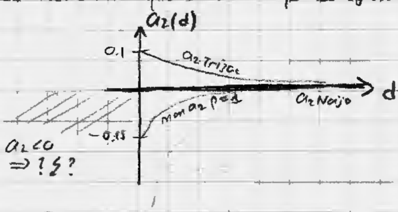
$$= -\frac{1 - 32\frac{p-1}{p}(d-1)}{2d^2 + 3d - 5 + \frac{6}{d} + 30\frac{p-1}{p}(d-1)}$$

Problème : négatif… Mais : calculs vérifiés avec Mathematica : corrects ! Or, eq. (18) Noije pour $\alpha=1$ ⇒

$a_2^{Noije}(\alpha=1) = 0$

Or il faudrait que dans $\lim_{p\to 1}$ je me rapproche du a_2 de Trizac, et pour $\lim_{p\to 0}$ de celui de Noije pour $\alpha=1$. Or mon a_2 admet comme limite : $\lim_{p\to 0} a_2(p) = 16/15 \neq 0$, et $\lim_{p\to 1} a_2(p) = -1/(2d^2+3d-5-6/d)$…

Pourtant, les calculs sont corrects à partir de l'équivalent de l'éq. (46) de Trizac, avec le formulaire de l'article, lui aussi vérifié.



Supposons ceci correct, alors on en tire α_{q} et les exposants de déclin $\xi = \frac{2}{1+\alpha}$, $\gamma = -\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$;

Résumé : qu'est-ce qui a été fait ?

1) Calcul de $\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{I}(\tilde{r},\tilde{r})$: intégrale à calculer analytiquement : $\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{I}(\tilde{r},\tilde{r}) = -c_1^{n}C(d)\langle c_1\rangle + \frac{1}{\alpha^2}I$; $I = \ldots$ à calculer : $\int m\, d\hat{x}\, e^{-B|x|^2 - A|x|^2}|x|\,|_{B=\ldots}$

↳ ne peut pas exploiter les résultats pour différents réservoirs, ni calculer a_2 à un bas ordre pour $\alpha=1$

2) Calcul de a_2 : équivalent de éq. (46) K=4 : ⟶ à la main ⟶ prg. mathematica } m̂. résultat : ∄ a_2 incompréhensible (−) (plus proche de 0 ?), asymptote… ∄

tests : (47) m̂. prg. mathematica que ici ↑ ⇒ m̂. résultat que dans l'article (valide le prg. mathematica)

3) Maintenant : Chap.-Enskog annihil. proba.

Ⓒ

• Calcul des exposants de déclin : $\alpha = 1 + \frac{2}{k}\left(\frac{\langle C_{12} C_1^k\rangle}{\langle C_{12}\rangle\langle C_1^k\rangle} - 1\right) + \frac{1-p}{p}\frac{1}{c(d)}\frac{1}{\langle C_{12}\rangle\langle C_1^k\rangle}\mu_k$; $c(d) = \pi^{\frac{d+1}{2}} / \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)$

$k=0$: C'est la gaussienne pour $a_2 \equiv 0$. Ce cas est compris dans la correction en $k=2$.

$k=2$: avec $\mu_2 = 0$, on a :

$$\alpha_2 = 1 + \left(1 + \frac{1}{2d} + a_2 \frac{1}{8}(2 + 3/d) - 1\right) = \overbrace{1 + \frac{1}{2d}}^{=\alpha_0} + a_2 \frac{2+3/d}{8} \quad ; \quad a_2 = -\frac{1 - 32\frac{p-1}{p}(d-1)}{2d^2 + 3d - 5 + 6/d + 30\frac{p-1}{p}(d-1)} \quad ⊛$$

$k=4$: NON : suffit de prendre la définition de α : $\alpha = \langle C_{12} C_1^4\rangle / \langle C_{12}\rangle\langle C_1^4\rangle$

$$\alpha_4 = \cancel{1+}\frac{1}{2}\left(-1 + \frac{\langle C_{12} C^4\rangle_0 + \frac{1}{2}\langle C_{12}^2\rangle_0 + 1/2(1 + 1/2d)\langle C_{12}^3 C^2\rangle_0}{\langle C_{12}\rangle_0\langle C_1^4\rangle_0} + \frac{1}{\langle C_{12}\rangle_0\langle C_1^4\rangle_0}\left(\frac{1}{d}\langle C_{12} C^4\rangle_0 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2d}\right)\frac{3}{2d}\langle C_{12}^3 C^2\rangle_0\right) a_2 + \frac{1-p}{p}\sqrt{2}(d-1)\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\left(\frac{2}{d}\right)^{5/2}\frac{1}{\langle C_{12}\rangle_0\langle C_1^4\rangle_0}\left(1 - \frac{15}{16}a_2\right)\right)$$

$$\Rightarrow \alpha_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{d+2}{2}\left(\frac{d+2}{2} + \frac{(d+1)(d+3)}{2d} + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d}\right)(d+1)\right) + \frac{1}{2d}\frac{d+2}{2}\left(\frac{d+2}{2} + \frac{3}{2}2(d+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d}\right)\right)a_2 + \frac{1-p}{p}\frac{d+2}{2}2^3\frac{d-1}{d}\left(1 - \frac{15}{16}a_2\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{d+2}{2}\left(d/2 + 1 + \frac{d^2+4d+3}{2d} + \left(1 + \frac{2}{d}\right)(d+1)\right) + \frac{1}{2d}\frac{d+2}{2}\left(d/2 + 1 + 3(d+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d}\right)\right)a_2 + \frac{1-p}{p}(d+2)4\frac{d-1}{d}\left(1 - 15/16\, a_2\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{d}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(d/2 + 1 + d/2 + 1/2 + \frac{3}{2}\frac{1}{d} + d + 1 + 1/2 + 1/2d\right) + \frac{d+2}{4d}\left(d/2 + 1 + 3\left(d/2 + 1 + 1/2 + 1/d\right)\right)a_2 + \frac{1-p}{p}(d+2)4\frac{d-1}{d} - \frac{1-p}{p}(d+2)4\frac{d-1}{d}\frac{15}{16}a_2$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{d}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(2 + 2d + 2\frac{1}{d}\right) + \frac{d+2}{4d}\left(d/2 + 1 + 3/2\, d + 9/2 + 3\frac{1}{d}\right)a_2 + \frac{1-p}{p}4\frac{(d-1)(d+2)}{d} - 4\cdot\frac{15}{16}\frac{1-p}{p}\frac{(d-1)(d+1)}{d}a_2$$

$$= \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{d}{2}\right)\left(1 + d + 1/d\right) + \frac{d+2}{4d}\left(\frac{11}{2} + 2d + 7\frac{1}{d}\right)a_2 + \frac{1-p}{p}4\frac{(d-1)(d+2)}{d} - \frac{15}{4}\frac{1-p}{p}\frac{(d-1)(d+1)}{d}a_2$$

$$= \frac{1}{2} + \left(1 + d + 1/d + \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1-p}{p}4\frac{(d-1)(d+2)}{d} + a_2\left[(d+2)\left(\frac{11}{8}\frac{1}{d} + \frac{1}{2} + \frac{7}{4}\frac{1}{d^2}\right) - \frac{15}{4}\frac{1-p}{p}\frac{(d-1)(d+1)}{d}\right]$$

$$= 2 + \frac{3}{2}d + \frac{1}{d} + \frac{1}{2}d^2 + \frac{1-p}{p}4(d-1)(d+2)/d + a_2\left[\frac{11}{8} + \frac{5}{4}d + \frac{7}{4}\frac{1}{d} + \frac{11}{4}\frac{1}{d} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}1/d^2 - \frac{15}{4}\frac{1-p}{p}\frac{(d-1)(d+2)}{d}\right]$$

$$= 2 + \frac{3}{2}d + \frac{1}{d} + \frac{1}{2}d^2 + \frac{1-p}{p}4(d-1)(d+1)/d + a_2\left[\frac{31}{8} + \frac{5}{4}d + \frac{7}{2}\frac{1}{d} + \frac{7}{2}\frac{1}{d^2} - \frac{15}{4}\frac{1-p}{p}\frac{(d-1)(d+2)}{d}\right]$$

etc.

~~Pas vraiment nécessaire car on a déjà une bonne correction pour α_2 avec a_2 calculé avant.~~ On obtient ⊛, avec $\xi_2 = \frac{2}{1+\alpha_2}$. Or

$$\lim_{p\to 0}\alpha_2(p) = \frac{27}{30}\frac{1}{d} + \frac{38}{30} \neq 1 + \frac{1}{2d} \quad \text{(pas d'annihilation)}$$